Vol. 6

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. VI. — (Anno LXXV)

Fascicoli 1 a 6 - Gennaio a Giugno 1936 (XIV)

NAPOLI
S. I. E. M. - STABILIMENTO INDUSTRIE EDITORIALI MERIDIONALI
S. Giovanni Maggiore Pignatelli, 2
1936 - XIV

Pubblicato il dì 3 Novembre 1936 - XV

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1935 (XIII)

letta nell' adunanza del dì 1.° febbraio 1936 (XIV)

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

La sommaria notizia che nel febbraio di ciascun anno il vostro Segretario ha l' obbligo di dare sull' attività accademica dell' anno precedente sarà questa volta anche più succinta del solito: giacchè per il passaggio del nostro Sodalizio dalle vecchie disposizioni, che ne avevano regolato la vita per oltre un settantennio, al nuovo Statuto, il quale è venuto da pochi mesi ad inquadrarlo in una più larga associazione culturale meglio rispondente alle direttive del regime, l' attività accademica, che si era svolta normalmente nel primo quadrimestre del 1935, ha dovuto subire una necessaria per quanto breve sosta in conseguenza di questa fase di assestamento, ed è stata solo parzialmente ripresa nell' ultimo bimestre per le generali limitazioni imposte dal periodo eccezionale che attraversa il nostro Paese saldamente e concordemente proteso in una lotta, nella quale sono impegnati la sua sicurezza e il suo decoro e la sua stessa civiltà millenaria.

È con l' animo pienamente fiducioso negli immancabili fulgidi destini della Patria nostra che noi oggi ricordiamo dunque brevemente quanto di più notevole ebbe a verificarsi nella vita accademica del decorso anno 1935.

Vennero pubblicati due fascicoli semestrali del Rendiconto, il volume XX della serie 2.ª degli Atti e, quale appendice a quest' ultimo, la seconda edizione della *Mineralogia Vesuviana* di Ferruccio ZAMBONINI, curata dal socio QUERCIGH.

Il Rendiconto accolse sei note del socio corrispondente ANDREOLI *Sulle metriche Cayleyane delle* V_2 *ed una terza geometria non euclidea*, sopra gli *Elementi per una geometria metrico-differenziale di una* V_1 *in una* V_2 *isotropa Cayleyana*, *Sulla topologia degli* S_3 *e la polidromia di intreccio*, *Sugli indici di diffusione nei fenomeni statistici di ricambio sociale*, sopra una *Teoria generale di certi indici nei fenomeni statistici* (*endogamia, omogamia, diffusione* ecc.), e sopra una *Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l' assoluta convergenza e la teoria dei*

gruppi; un lavoro del socio RICCI riflettente *Precisazioni sul calcolo esatto delle tensioni tangenziali in un cilindro sollecitato a flessione, taglio e torsione;* un altro del socio GALLUCCI *Su le curve razionali piane d'ordine n;* e una nota del socio RIZZO, destinata a riassumere le *Osservazioni meteorologiche raccolte nell'anno 1931 nell'Istituto di Fisica terrestpe della R. Università di Napoli.* Vi furono inoltre inserite diverse note di studiosi estranei all'Accademia, e precisamente una del dott. A. COLUCCI *Sulla derivata ennesima di un Wronskiano,* una della dott. M. VIARO relativa alle *Osservazioni del pianeta Saturno eseguite al R. Osservatorio di Capodimonte,* una dell'ing. G. DEL VECCHIO sulla *Generalizzazione della teoria statica degli archi piani a grande curvatura,* una dell'ing. G. RONZA sopra *I giacimenti silexitici di Davoli e Satriano in provincia di Catanzaro,* ed, ancora, una della prof. M. FIORE su *Di un'alga fossile nuova per la Pesciara di Bolca,* una del dott. G. LA VOLPE relativa agli *Elementi per una teoria matematica dell'equilibrio economico dinamico,* ed infine una del dott. T. NICOLINI *Sugli errori delle parallassi trigonometriche e spettroscopiche.*

Nel volume XX degli Atti — del quale si era già precedentemente iniziata la pubblicazione mercè i sussidi generosamente largiti dalla benemerita direzione generale del Banco di Napoli — furono ammesse altre tre memorie, che ne permisero il completamento: una del socio SCORZA sopra *Le algebre del 4.° ordine,* la quale ha per oggetto la determinazione di tutti i possibili tipi di algebre del 4.° ordine, senza imporre alla ricerca alcuna ipotesi restrittiva; una della dott. CARBONARA sulle *Affinità, trasformazioni cremoniane e gruppi automorfi delle algebre complesse del 3.° ordine dotate di modulo,* in cui questi gruppi notevoli vengono determinati per ciascuna delle cinque algebre complesse del terzo ordine dotata di modulo; e una dei soci DE LORENZO e D'ERASMO, che riguarda l'esame dei principali *Avanzi di ippopotamo nell'Italia meridionale,* in base al quale si dimostra, che tali resti fossili rientrano tutti nelle dimensioni comunemente raggiunte dal vivente *Hippopotamus amphibius* e che non si può in conseguenza ritenere fondata l'esistenza, per lo innanzi ammessa nel Pleistocene delle nostre regioni, di altre specie distinte per la loro maggiore o minore statura.

Come negli anni precedenti, l'Accademia non mancò d'interessarsi ad attualità scientifiche, a congressi o ad altre manifestazioni di particolare interesse: così per la pubblicazione dei nuovi manoscritti di Leonardo, sulla quale il socio MARCOLONGO, attivissimo componente della commissione Vinciana, dette a varie riprese esaurienti informazioni; così per le onoranze tributate al compianto consocio senatore Giovanni PALADINO nell'occasione dello scoprimento di un busto nell'Istituto d'Istologia e Fisiologia generale; così per gli studi sul problema della variazione delle latitudini, che, iniziati da più di mezzo secolo nell'Osservatorio Astronomico di Capodimonte per opera di Arminio NOBILE e di Emanuele FERGOLA, tornano ora, mercè il

fattivo interessamento del nostro consocio CARNERA, dopo vicende internazionali molteplici, ad avere impulso e coordinamento nel nuovo Ufficio Centrale per il servizio delle latitudini, istituito, per intesa internazionale, presso il medesimo Osservatorio, donde era partita la prima spinta a tali ricerche.

Nell'anno 1935 sono scaduti due concorsi a premio. Per quello che si intitola al nome di Agostino OGLIALORO TODARO e che è destinato a premiare giovani cultori di Chimica pura, incoraggiandoli nell'indagine scientifica, la Commissione BAKUNIN, GIORDANI e QUERCIGH ha espresso il parere, approvato dall'Accademia, di dividere la somma disponibile di lire mille in due premi uguali tra i due concorrenti dottori ARGENTINO Antonio e DE GENNARO Giovanni. L'altro concorso, che ricordando i nomi di Gabriele e Ruggiero TORELLI vuole spingere alla ricerca i migliori laureati in Matematica pura, è invece andato deserto; ma l'Accademia ne ha prorogato i termini, mentre ha bandito con le norme consuete il nuovo concorso, riservato ai laureati del quinquennio 1935-39. Furono ugualmente banditi, or è un anno, i concorsi al premio SEMENTINI per memorie di Chimica applicata, inedite o pubblicate nel biennio 1934-36, al premio OGLIALORO per il triennio 1935-37, e al premio accademico biennale sul tema: *Studio dello spazio funzionale relativo ai polinomi definiti di un dato grado.* È da augurarsi, che la sospensione di tutti i concorsi recentemente disposta dal Governo per ragioni di opportunità possa essere presto abrogata e che per le maggiori fortune d'Italia la gioventù studiosa, compiuto il proprio dovere sui campi di battaglia, deponga il moschetto vittorioso per tornare sui libri all'usata fatica.

Modificate, col nuovo Statuto approvato con R. D. 16 ott. 1934, n. 2311, e col successivo R. D. 26 settembre 1935, n. 1803, le norme relative alle cariche accademiche, vennero dalle competenti Autorità nominati presidente per il triennio 1935-38 il socio sen. DE LORENZO, e segretario, per lo stesso periodo, il socio D'ERASMO. Per effetto delle medesime disposizioni di legge il socio ordinario QUAGLIARIELLO ed i corrispondenti ANILE e SALVI, tutti e tre della sezione di Scienze Naturali, sono passati, per opzione, alla R. Accademia di Scienze Mediche e Chirurgiche, divenuta una distinta classe della medesima Società Reale.

Gravi perdite subì l'Accademia nel corso dell'anno 1935, nel quale soccombettero sotto il peso degli anni ben tre soci ordinari della sezione di Scienze Naturali: Antonio DELLA VALLE, Emanuele PATERNÒ e Guido GRASSI: nobili figure di scienziati e di maestri, che per circa un quarantennio furono decoro di questo sodalizio e tanta luce di sapere e di bontà irradiarono intorno a loro nel lungo cammino della vita e degli studi.

Di Antonio DELLA VALLE, professore emerito di Anatomia comparata nella R. Università di Napoli, scomparso a 85 anni il dì 6 gennaio 1935 e commemorato dal consocio COLOSI nella tornata del successivo giorno 12, sono noti gl'importanti contributi di accurate osservazioni e di ricerche

originali sopra i Copepodi parassiti e commensali di Ascidiacei, sui Gammarini e sulle Ascidie composte, nonchè gl'interessanti lavori riguardanti gli ardui problemi che concernono le prime fasi di sviluppo dei vertebrati ed il significato delle strutture fondamentali dei loro embrioni. Socio corrispondente dal 1895, ordinario dal 1898, segretario dal 1907 al 1909 e presidente nel 1914, Antonio DELLA VALLE fu lungamente e meritatamente apprezzato in quest' Accademia per la solida intelligenza, per l'integrità del carattere, per l'instancabile perseveranza nella ricerca, per lo scrupoloso adempimento di ogni suo dovere.

Con la morte del sen. Emanuele PATERNÒ di SESSA, avvenuta in Palermo il 18 gennaio 1935, è scomparsa una delle figure più illustri della Chimica italiana, alla quale lo scienziato diede contributi molteplici di duratura ed universale risonanza, ed altresì una delle personalità più spiccate nel campo politico e della pubblica amministrazione. Allievo del CANNIZZARO, insegnò dapprima per un ventennio a Palermo e passò poi all'Università di Roma, nella quale rimase per oltre trenta anni, pubblicando numerose ed importanti memorie di chimica inorganica, organica, analitica e di chimica fisica, fra cui vengono specialmente ricordati i lavori sulla crioscopia, sulle azioni chimiche della luce, ecc. Apparteneva alla nostra Accademia fin dal 10 novembre 1883.

Il prof. Guido GRASSI, socio corrispondente dal 1891 e ordinario dal 1897, che per molti anni fu docente di fisica tecnica e poscia anche direttore della Scuola d'Ingegneria di Napoli, e quindi successore di Galileo FERRARIS alla cattedra di elettrotecnica di Torino, ha legato il suo nome a svariati lavori di fisica generale ed applicata, riflettenti le ricerche sperimentali sulla trasmissione del calore, la teoria cinetica dei gas applicata allo studio dell'atmosfera, la misura della resistenza interna degli accumulatori ecc., e a manuali di termodinamica, elettrotecnica ecc., che ottennero la più favorevole accoglienza, procacciandogli larga e meritata rinomanza.

I colleghi che per affinità di studi o per antica affettuosa consuetudine ebbero con questi vecchi e grandi e buoni Maestri più diretti rapporti sapranno certo rievocarne la figura, l'opera, i meriti molteplici, assai più degnamente di quanto non possa oggi fare colui che vi parla, il quale tuttavia è sicuro d'interpretare il vostro sentimento unanime inviando alla venerata memoria dei defunti consoci il mesto e reverente omaggio del nostro comune rimpianto.

ECCLISSE TOTALE DI LUNA DELL' 8 GENNAIO 1936.
OSSERVAZIONI FATTE NEL R. OSSERVATORIO ASTRONOMICO DI CAPODIMONTE

Nota del socio corrispondente **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 1. febbraio 1936 - XIV)

Sunto. — Si espongono i risultati delle osservazioni fatte durante l'ecclisse totale di luna, e particolarmente gli istanti di alcune occultazioni stellari, e dei passaggi dell'ombra in alcuni punti particolari del disco lunare.

Il cielo, che fino alle ore 14 era stato per Napoli completamente coperto, dopo aver mostrato quà e là squarci di sereno nel pomeriggio, si rasserenò al tramonto, mantenendosi però nuvoloso verso oriente, e particolarmente là, dove doveva sorgere la Luna alle 16 ore e 41 min. di T. M. E. C. La Luna apparve completamente scoperta dalle nubi solo circa 5 minuti dopo l'entrata sua nell'ombra, onde andò perduta la determinazione dell'istante del primo contatto. Dalle 17 ore e 35 in poi, il cielo fu costantemente sereno: le immagini delle stelle, come quelle dei crateri, dei circhi e dei mari lunari furono sempre sodisfacenti; ed il bordo lunare, che dal principio fino circa alle 18 e 40 era stato visto calmo e nitido, divenne ondulato e vibrante e tale rimase fino circa alle 19 e 35, poi ritornò ancora calmo e tranquillo. Gli osservatori del fenomeno furono:

Prof. E. GUERRIERI all'equatoriale di Fraunhofer di 17 cent. (G),

Dott. M. VIARO, all'equatoriale di Merz di 13 cent. (V),

E lo scrivente all'equatoriale di Reichenbach di 8 cent. (C).

I due primi osservatori si servirono di cronografi collegati ai pendoli di RIEFLER e GRIMALDE per la determinazione degli istanti delle occultazioni; gli altri istanti vennero determinati servendosi di semplici cronometri portatili confrontati prima e dopo l'osservazione con gli orologi fondamentali, il cui stato venne determinato durante il corso della stessa eclisse dalla signorina Dott. VIARO, con osservazioni in meridiano fatte allo strumento dei passaggi di Bamberg.

L'osservazione dei contatti ha dato i risultati seguenti:

	Calcolo		Oss. C.		Oss. G.		Oss V.	
				o—c		o—c		o—c
	h	m	m	m	m	m	m	m
Principio della totalità:	18	57.7	59.1	+1.4	57.2	—0.5	58.8	+1.1
Fine della totalità	19	21.2	19.3	—1.9	19.2	—2.0	21.0	+0.2
Uscita della Luna dall'ombra	20	51.0	52.3	+1.3	50.4	—0.6	51.4	+0.4

Gli istanti calcolati sono quelli dati dalla *Connaissance des Temps*, e per ogni osservatore sono dati gli scarti fra l'osservazione ed il calcolo.

Durante il corso dell' ecclisse furono osservate ancora le occultazioni di due stelle nell'istante della loro immersione: le immagini nitide, precise e puntiformi poterono esser osservate abbastanza bene. L'immersione della prima stella al centro quasi del disco apparve istantanea e sicura; non così invece quella della seconda, che apparendo spostarsi quasi tangenzialmente al bordo lunare, parve all'osservatore G riapparisse qualche secondo dopo una prima scomparsa per scomparire poi istantaneamente alle $20^h\ 19^m\ 29^s.4$, in guisa tale da aver avuto la sensazione, che non siasi trattato di illusione.

Le stelle e gli istanti osservati sono i seguenti:

Stella	Istanti di immersione.	
	Oss. G	Oss. V
B.D. + 21.1580	$18^h\ 46^m\ 54^s.6$	. . . .
B.D. + 21.1589	$20^h\ 19^m\ 18^s.3$	$20^h\ 19^m\ 15^s.0$

Seguende inoltre il successivo spostarsi dell'ombra sul disco lunare, furono segnati i seguenti istanti:

	Oss. C.		Oss. G.
	h	m	m
Ombra tocca il I bordo di Tycho	18	16.0	15.7
Ombra al centro di Tycho	18	18.0	18.2
Ombra al II bordo di Tycho	18	19.9	20.0
Ombra al I bordo del Mare Crisium	18	21.3	21.2
Ombra al II bordo del Mare Crisium	18	28.3	28.4
Ombra oscura Cr. Apollonius	18	30.1	—
Ombra lascia il I bordo di Tycho	19	42.1	41.9
Ombra al centro di Tycho	19	43.1	43.3
Ombra lascia il II bordo di Tycho	19	44.5	44.7
Ombra lascia Grimaldi	19	46.6	46.5
Ombra lascia Copernicus	20	9.3	9.4
Ombra lascia Plato	20	27.3	27.5
Ombra lascia Mare Serenitatis	20	37.	—
Ombra lascia Roemer	20	39.3	—
Ombra lascia il I bordo del Mare Crisium	20	41.5	41.6
Ombra lascia Apollonius	20	42.1	42.2
Ombra lascia il II bordo del Mare Crisium	20	46.8	46.9

L' Osservatore G. ha notato inoltre, che dal principio dell' eclisse fino circa alle ore 18 e 20, mentre progrediva l'ombra sul disco lunare si aveva a sensazione, che l' ombra fosse molto fonda, tanto da non intravedere

nessun cratere lunare e da giudicare l'eclisse come appartenente al tipo delle oscure. Ma dopo l'istante indicato si notò, che le parti laterali dell'astro diventavano alquanto lucide, in modo da far distinguere alcuni circhi e crateri cospicui e trovantisi prossimi al bordo anche durante la totalità come ad e. Tycho, che appariva a contorno netto e preciso; e sufficientemente luminosi Platone, Keplero, e più di tutti Aristarco. Il *Mare Tranquillitatis* appariva molto oscuro, ma al bordo di esso, come tre perline brillavano i tre crateri Plinio, Menelao e Manilio, e ciò alle 19 e 35, ossia subito dopo la fine della totalità. Alle 19 e 50 si notarono degni di rilievo verso il bordo illuminato, ma ancora nell'ombra, i tre circhi Petavio, Furnelio e Vendelino caratteristicamente oscuri, neri come macchie solari, e risaltanti quindi sulla superficie circostante: ma più di tutti oscurissimo si mostrava Langreno.

Il paradosso di Carlyle

Nota del socio corrispondente **G. Gallucci**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — Si tratta di un paradosso economico: la sovraproduzione contemporanea al sottoconsumo, cioè la miseria generale nell'abbondanza. Dopo un breve accenno alla *crisi inglese*, l'autore espone il concetto del potenziale del valore economico ed enuncia una legge analoga alla legge di Ohm dell'elettrodinamica, dando in fine la spiegazione del paradosso di Carlyle.

Chiamo paradosso di Carlyle il paradosso economico della miseria nell'abbondanza, cioè della sovraproduzione e del sottoconsumo. È nelle pagine di storia viva di « *Past and Present* » che esso trovasi per la prima volta enunciato. La descrizione impressionante della tragica miseria dei lavoratori e della massa del popolo inglese nel periodo culminante della crisi, intorno al 1840 (l'anno della fame, *the hungry forty*) trovasi inquadrata in un'ampia trattazione della quistione sociale sorta dal contrasto tra l'accumulo di ricchezza per lo sviluppo della *grande industria* e la miseria della massa. In un certo punto l'autore attribuisce il malessere generale a certi *invisibili incantamenti* che, non si sa come, interferiscono nella vita associata per mutare i benefici del nuovo sistema di produzione nella miseria crescente della maggioranza del popolo. « Oh! se quest'incubo ma-« ledetto, che, invisibile sugge la vita nostra e dei nostri, potesse assumere « una figura e volesse venirci incontro come tigre africana, come Behemot « del Caos, come lo stesso nimicissimo! in qualunque forma, in cui ci fosse « dato di vederlo e di afferrarlo! »

La *crisi inglese* presenta in atto il paradosso della sovraproduzione e del sottoconsumo. Chiamo crisi inglese la successione dei moti di assestamento provocati dal sorgere della grande industria (rivoluzione industriale) e dagli effetti sociali e politici della rivoluzione francese. Essa si presenta, come l'attuale crisi mondiale, nel suo triplice aspetto di crisi spirituale, sociale ed economica. Non si può intendere la crisi odierna senza avere approfondita la complessa fenomenologia della crisi inglese. Questa si inizia con una crisi di inflazione. Lo sviluppo dell'istituto del credito, reso necessario dalla rapida circolazione del capitale denaro, creò, accanto al capitale reale un *capitale fittizio*. Fu istituito un *debito fluttuante* con l'emissione di buoni del tesoro rimborsabili in numerario (oro). Ma l'abuso di questo mezzo costrinse la Banca d'Inghilterra a sospendere i pagamenti in oro (1797); il governo di Pitt dové rinunziare alla valuta aurea, e la carta

moneta, emessa per i bisogni della circolazione, fu solo in parte garentita dalla riserva. Un ulteriore aumento della moneta cartacea accentuò la crisi d'inflazione, con i suoi immancabili effetti. Si dovè correre ai ripari, e nel 1810 il « *Bullion Comitee* » in un suo rapporto adottò le idee di RICARDO, che l'anno prima aveva esposta la sua teoria deflazionistica in una importante monografia: « *The high price of Bullion a proof of the depreciation of Bank notes* ». L'opposizione delle Banche e dei capitalisti ritardò l'adozione di provvedimenti deflazionistici, ma, essendosi nel frattempo aumentati i danni dell'inflazione, il Parlamento inglese nel 1819 approvò il rapporto che prima aveva respinto. S'iniziò così la fase deflazionistica della crisi, la quale fu complicata ancora di più dalla legge dei grani (cornlaw) e dalla legge delle Case di lavoro (Workhouses, le Bastiglie della fame, 1834). Ed il malessere arrivò al culmine nel 1840, l'anno della fame. La ridistribuzione di ricchezza, primo effetto del sistema capitalistico di produzione, impegnava solo alcuni ristretti strati sociali; la gran massa risentì solo i danni dell'applicazione della legge della domanda e dell'offerta alla *forza lavoro* considerata come merce. E qui Carlo MARX ed ENGELS intravidero la spiegazione degl' *invisibili incantamenti* di cui parlava CARLYLE. Ma la formola del capitale e la determinazione della funzione del *plus lavoro* non diedero una spiegazione soddisfacente del paradosso della sovraproduzione contemporanea al sotto consumo, perchè il Marxismo rimase fermo nel principio della domanda e dell'offerta, principio assoluto dell'equilibrio economico statico. Ed anche oggi l'economia del liberismo, inclusa l'economia matematica, si dibatte vanamente nelle difficoltà che presenta il paradosso di CARLYLE, ed in mancanza di una soluzione si è arrivati sino a negare l'esistenza del problema. Però la realtà smentisce i teorici dell'economia presentando oggi, come nella crisi inglese, il fatto della sovraproduzione contemporanea al sotto consumo. Per risolvere la quistione bisogna superare l'economia statica ed approfondire l'equilibrio economico dinamicamente considerato. La sostituzione di equazioni integro-differenziali alle equazioni differenziali di PARETO è già un progresso, ma non sufficiente a risolvere il paradosso di CARLYLE, perchè i vari tentativi si riferiscono ad un modello artificiale, ad una realtà più o meno semplificata, o meglio, svuotata della sua concretezza, in modo che sfugge il fatto economico come totalitario.

La legge della domanda e dell'offerta non è un principio assoluto dell'economia, perchè non ha significato in regime monopolistico, in regime di trust, e nello stato mercantile chiuso, e non è valido nelle varie forme dell'economia controllata. Le equazioni dell'equilibrio economico presuppongono l'elaborazione dei concetti di individuo sociale, lavoro sociale, bene economico e valore economico, tenendo presente la realtà sociale nel suo complesso, in modo da poter determinare i principii del reggimento economico valevoli indipendentemente dal sistema di produzione e dal si-

stema politico. Siamo ora ben lontani dalla costituzione di un sistema completo dei principii dell'economia, però già è manifesta l'insufficienza di *modelli* puramente meccanici.

Il tentativo di passare dai modelli meccanici ad altri modelli più complessi, ad esempio ad un modello elettrodinamico, non è stato ancora fatto, e può dare risultati imprevisti. Tanto più che nella stessa economia classica di RICARDO sono delineati alcuni caratteri del bene economico che non si prestano ad essere inclusi in un modello meccanico. *La categoria del valore economico appare inseparabile dalla categoria del* POTENZIALE *del valore economico*, che ha un significato profondamente dinamico.

La produzione ha luogo a distanza dal consumatore; il flusso economico va dalla produzione al consumo. Ecco un fatto economico primordiale che ha valore assoluto. come tutte le sue conseguenze necessarie.

Per portare i beni economici dalla produzione al consumo si deve spendere lavoro sociale, che è impiegato a vincere resistenze di diverse specie: le distanze, le difficoltà che nascono dalla molteplicità dei consumatori rispetto al piccolo numero dei produttori. Altre resistenze dipendono da tutto l'insieme del processo economico e sociale: la forte pressione tributaria, le barriere doganali, i monopoli, trusts e cartelli, l'accaparramento, le particolarità della circolazione monetaria (inflazione e deflazione), la disoccupazione, ed, in fine, l'accentuata depopolazione.

La variazione di tutte queste resistenze, se avviene in senso crescente, ostacola sempre più il passaggio della produzione attraverso i vari strati sociali.

Da questi principii generalissimi risulta un peculiare aspetto del bene economico: il suo *potenziale*. L'analogia con il potenziale elettrico è perfetta: il bene economico, in quanto occupa una posizione determinata nel flusso economico, a distanza maggiore o minore dallo sbocco, richiede lavoro per essere portato al consumo, cioè al *potenziale zero*. I beni economici immessi nella circolazione, a distanza dal consumo, sono dotati di una *forza economico-motrice*. Chiameremo *capitale* una somma di beni economici dotata di una forza economico-motrice, cioè, a potenziale diverso da zero. La formazione del *capitale* è la caratteristica fondamentale di ogni sistema di produzione. Per questa ragione alcuni storici hanno creduto di trovare traccie di capitalismo persino presso i Greci e presso i Romani, ma bisogna distinguere *capitale* e *capitalismo*. Il *capitale* si forma automaticamente in qualsiasi sistema di produzione, il capitalismo è un sistema di produzione avente caratteristiche proprie e storicamente definito.

Questo concetto del potenziale del valore economico illumina di viva luce le discussioni sull'equazione *valore-lavoro* e permette di arrivare sino in fondo nella critica interiore dell'economia marxista.

In base al concetto del potenziale del valore economico si può svolgere una dinamica economica in perfetta analogia con l'elettrodinamica.

Indichiamo con i l'intensità del flusso economico, cioè la quantità di beni che in un determinato tempo passa attraverso i vari strati sociali. Stabilita la condizione di equilibrio in cui il consumo si adegua alla produzione sufficiente per i bisogni della vita sociale, un aumento di i dà il *sovraconsumo* ed una diminuizione il *sotto-consumo*.

Sia, inoltre, e la forza economico-motrice della produzione (in breve, lo *slancio*, la *tensione* della produzione); un aumento di e corrisponde alla *sovra-produzione*, una diminuzione alla sottoproduzione.

Facciamo ora intervenire la resistenza r al flusso economico, considerata in tutti gli elementi dianzi accennati. Le grandezze i, e ed r corrispondono rispettivamente all'intensità della corrente, alla forza elettromotrice ed alla resistenza. Il principio più generale dell'economia è la legge di Ohm espressa in termini economici: *le variazioni del consumo* i *hanno luogo nello stesso senso delle variazioni della forza economico-motrice ed in senso contrario alle variazioni della resistenza* r. Questa legge è valida indipendentemente dal sistema di produzione e dal sistema politico; solo i suoi effetti si configurano diversamente nei vari sistemi. Per esempio, se il lavoro è considerato come merce e quindi sottoposto alla legge della domanda e dell'offerta e se si ammette la proprietà privata dei mezzi di produzione insieme con la libertà assoluta dell'iniziativa privata, il salario può scendere al disotto dei limiti del sostentamento normale del lavoratore e si può avere la miseria generale nell'abbondanza della produzione. A ciò si riducono in sostanza *gl' invisibili incantamenti* di cui parla Tommaso Carlyle. Il paradosso di Carlyle non è dunque un paradosso, ma un corollario della legge di Ohm espressa in termini economici.

Supponiamo e stazionario (crisi attuale); allora i varia in senso contrario ad r; per aumentrre i bisogna far diminuire r. Nella crisi inglese si verificò l'aumento di e, ma r aumentò in maggior misura, e si ebbe la diminuizione di i: sovraproduzione contemporanea al sottoconsumo; paradosso di Carlyle (« Past and Present »). Nel periodo inflazionistico del dopoguerra in Italia, si ebbe la diminuizione di e, ma la resistenza r diminuì in maggior misura, quindi si ebbe l'aumento di i: sottoproduzione e sovraconsumo; il carnevale del 19 e 20; episodi umoristici riferiti dal prof. Pantaleoni nel suo libro « Bolscevismo italiano », 1922.

La legge di Ohm espressa in termini economici si presta alla trattazione delle grandi crisi di produzione e permette di superare la formoletta dello squilibrio tra prezzo e costo di produzione.

Coppie di variabili mutuamente casuali; matrici ed equazioni funzionali ad esse relative

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV).

Sunto. — In questa Nota si completa l'ordinario concetto di variabile casuale, dando quello di « coppie di variabili, mutuamente casuali ». Ad ognuna di tali coppie è collegata una matrice quadrata i cui elementi soddisfano a certe relazioni. Se si pone l'ipotesi che due variabili casuali formanti ambedue coppia con una terza, formano altresì coppia fra loro, ne seguono certi vincoli per le matrici. Al limite si trovano certe equazioni (funzionali) soddisfatte dal noto integrale della teoria degli errori (analoghe a quelle di Chapman).

1. Un concetto che può avere sviluppi nella teoria della probabilità e nella statistica, è quello qui esposto di « *coppie di variabili mutuamente casuali* ». Esso si collega da un lato alla teoria delle matrici, dall'altro (nel caso di variabili continue) a quelle di certe equazioni di composizione non lineari. (Cfr. l'equazione di Chapman).

Sia assegnata una certa grandezza A da misurare rispetto ad una certa scala di unità; scala costituita dai valori numerici $a_1, a_2, \ldots, a_n$. La misura effettuata con un primo sistema (realizzazione della scala; ad esempio: peso mediante una certa pesiera) risulti x, x essendo uno dei valori a; effettuato con un secondo sistema risulti y, y essendo anche esso uno dei valori a. Noi potremo ritenere tanto x come valore esatto, quanto y; l'altra variabile risulterà allora rispetto alla prima come variabile casuale.

La coppia ordinata (x, y) formerà allora una coppia di variabili casuali di I ordine.

Quello che si dice per x ed y, può ripetersi y e z. Ma allora, oltre la coppia diretta (x, z), si può pensare a riferire z ad x per l'intermediario di y: In altri termini scelta x come « misura esatta » y appare come variabile casuale; a sua volta scelta y come « misura esatta », z appare come variabile casuale rispetto ad essa, e quindi, indirettamente rispetto ad x.

Si ha allora la terna (x, y, z), di cui prima ed ultima variabile sono mutuamente casuali; le diremo di II ordine. Così possono definirsi quelle di terzo, etc. ordine.

2. Ad una coppia ordinata di variabili casuali, è collegata una certa matrice di probabilità (o se si vuole, di frequenza dalla quale si ritorna a quella di probabilità).

Sia p_{ij} la probabilità che al valore a_i della x, corrisponda il valore a della y. La matrice che considereremo è

$$P \equiv \begin{Vmatrix} p_{11} \cdots p_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ p_{n1} \cdots p_{nn} \end{Vmatrix}$$

Le p non sono indipendenti. In effetti ad a_i come valore della x, corrisponde a_1, con probabilità p_{i1}, come valore della y; oppure a_2, con probabilità p_{i2}, etc.

Ma, in tal modo si esauriscono *tutti* i casi possibili; dunque deve essere

$$\sum_j p_{ij} = 1.$$

Un ragionamento analogo va fatto per la scelta di una y con valore numerico a_j; si ha dunque anche

$$\sum_i p_{ij} = 1.$$

Pertanto *la matrice di probabilità corrispondente alla coppia* (x, y) *è data da*

$$P_{x,y} \equiv \| p_{ij} \| \quad ; \quad \sum_i p_{ij} = \sum_j p_{ij} = 1 \quad ; \quad 0 \leq p_{ij} \leq 1 \tag{A}$$

mentre quella relativa alla coppia (y, x) è data dalla matrice trasposta (scambio delle linee con le colonne).

3. Passiamo ora alle coppie di II ordine: sia (x, y, z) lo schema che la definisce; e sieno rispettivamente $P_{x,y}$ la matrice di (x, y); $Q_{y,z}$ quella di (y, z), con $Q \equiv \| q_{ij} \|$.

Ragionando come poc'anzi, e risultando indipendenti le probabilità relative alla prima e quelle relative alla seconda coppia, si avrà che alla misura a_i di x, corrisponde la misura a_j di z, con la probabilità espressa da

$$r_{ij} = p_{i1} q_{1j} + p_{i2} q_{2j} + \cdots \quad = \sum_s p_{is} q_{sj}$$

Si ottiene, in altri termini, una matrice $R \equiv \| r_{ij} \|$, *che risulta dalla moltiplicazione effettuata con le regole delle matrici*, di P e di Q.

Si osservi che:

$$\sum_i r_{ij} = \sum_i \sum_s p_{is} q_{sj} = \sum_s \left(\sum_i p_{is}' q_{sj} \right) = \sum_s \left(\sum_i p_{is} \right) q_{sj}$$

e, tenute presenti le (A), il sommatorio entro parentesi è l'unità; inoltre per le condizioni (A) applicate alle q, sarà

$$\sum_i r_{ij} = \sum_s q_{sj} = 1$$

ed analogamente

$$\sum_j r_{ij} = 1 \, .$$

Ciò dimostra: I) che le r_{ij}, che già risultano positive, sono anche minori dell' unità;

II) che esse soddisfano alle condizioni A. Dunque la *matrice R è una matrice di probabilità anch' essa.*

In modo del tutto analogo si vede che: *dette a e b due probabilità complementari, anche la matrice*

$$a\, P_{xy} + b\, M_{\eta\, , \,\xi} \equiv \| a p_{ij} + b m_{ij} \|$$

è una matrice di probabilità; essa corrisponde all'attribuire probabilità a alle misure x e, b alle misure ξ; e probabilità a alla y e b alla η.

In altri termini, *le matrici di probabilità formano gruppo da un lato, sistema lineare dall' altro.*

4. Per chiarire le idee, segue qui uno schema che esplicitamente dà un esempio.

Si abbiano due osservatori O', O'' i quali simultaneamente leggono i punti sulla faccia di un dado buttato a caso su un tavolo orizzontale; e, per convenzione, non leggano quelli della faccia superiore orizzontale, ma sibbene quelli su una delle facce verticali, e precisamente su quella che essi vedono di fronte.

5. È troppo evidente che, dato l' orientamento possibile della base del dado sul tavolo, se i due osservatori sono seduti l'uno a fianco dell'altro, vi sarà qualcosa di arbitrario e di casuale nella lettura stessa; in quanto se l' osservatore O' situato alla sinistra di O'' legge un certo punto su una certa faccia che egli giudica a lui prospiciente, O'' potrà leggere il punto sulla stessa faccia oppure su quella situata, guardando, alla destra di quella. E reciprocamente per O'' rispetto ad O'. Ciò dipenderà dalla posizione. In tal caso la serie $[X]$ è data da 1, 2, 3, 4, 5, 6; e (per concretare maggior-

mente le idee) i punti sieno segnati in modo che 1 e 6 sieno su facce opposte; che anche 2 e 5 lo sieno così come 3 e 4 e che infine collocata in una certa posizione il dado con la faccia 1 sul tavolo risulti 3 di fronte e 2 a sinistra.

Allora, secondo la posizione della faccia 1 sul tavolo, O' legge 3; O'' può leggere 3 oppure 5; se O' ha sempre 3 di fronte, il dado può poggiare invece che sulla 1, sulla 2; ed allora O'' legge 3 o 1; il dado può poggiare sulla 6 ed O'' legge 3 o 2; può poggiare sulla 4 e O'' legge 3 o 6.

Reciprocamente se O'' legge sempre 3, O' può leggere rispettivamente 3 o 2; 3 o 6; 3 o 4; 3 o 1.

In altri termini si hanno due serie di variabili casuali collegate fra loro in modo che ognuna di esse appare casuale rispetto all' altra.

E, come avevamo supposto i valori numerici di $[\xi']$ e $[\xi'']$ coincidono con quelli di $[X]$: si vede anzi che si ha la seguente tabella di possibilità di volte che una lettura di ξ' per O' corrisponda una lettura di un altro valore ξ'' per O'':

ξ' \ ξ''	1	2	3	4	5	6
1	4	1	1	1	1	0
2	1	4	1	1	0	1
3	1	1	4	0	1	1
4	1	1	0	4	1	1
5	1	0	1	1	4	1
6	0	1	1	1	1	4

6. Per passare al caso delle probabilità infinite, nel caso di una scala che sia numerabile, cioè coincida con i valori *interi* da $-\infty$ a $+\infty$, non vi è difficoltà concettuale alcuno, nè tanto meno di convergenza.

Se invece si ha la variabile continua, le cose si modificano alquanto. Al posto dell' indice i o j, compare la variabile continua s, o t; *noi supporremo* che s e t sieno effettivamente le misure di x e di y; che esse possono assumere i valori da $-\infty$ a $+\infty$; la matrice P risulta sostituita dal nucleo (con la terminologia delle equazioni integrali)

$$p(s, t) \qquad 0 \leq p \leq 1$$

con

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(s, t)\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, t)\, dt = 1.$$

Si potrebbero estendere tali considerazioni, imponendo integrali di STIELTJES invece ehe ordinari: ma, per ora, tralasciamo ciò.

Ci importa rilevare invece un altro lato della questione.

Supponiamo che — come nella teoria degli errori — la p sia funzione del binomio $s - t$, e se si vuole funzione simmetrica del suo argomento; *supponiamo* inoltre che:

Le leggi delle coppie di variabili mutuamente casuali, siano formalmente identiche, a meno del valore di certi parametri, qualunque sia l'ordine della coppia.

Ciò implica che

$$p = p(s - t, \alpha, \alpha', \ldots)$$

e dovrà dunque essere

$$p(s - t, \gamma, \gamma', \gamma'' \ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s - \lambda, \alpha, \alpha', \ldots)\, p(\lambda - t, \beta, \beta', \ldots)\, d\lambda \tag{B}$$

con $\alpha'', \beta'', \ldots$ funzioni delle $\alpha, \alpha', \ldots$, $\beta, \beta', \ldots$ (Cfr. l'equazione di CHAPMAN).

Si cade così su una quistione di teoria dei gruppi, collegata ad un problema di composizione (singolare).

In particolare se le p dipendono da un solo parametro, si ha,

$$\begin{gathered} p(s - t, \alpha'') = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s - \lambda, \alpha)\, p(\lambda - t, \alpha')\, d\lambda \\ \alpha'' = \varphi(\alpha, \alpha') \end{gathered} \tag{C}$$

Si può far vedere che effettivamente il primo membro delle (B) o (C) deve essere funzione del binomio $s - t$.

Quello che ci interessa ora di notare, è che: *le* (C) *sono effettivamente* soddisfatte *dall' integrando della teoria degli errori.*

Posto a tale scopo

$$p(s - t, \alpha) = e^{-\alpha(s-t)^2} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \qquad \alpha > 0\ ,$$

i ha in effetti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda, \alpha)\, d\lambda = 1.$$

Inoltre sarà

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s-\lambda, \alpha)\, p(\lambda - t, \beta)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(s-\lambda)^2} e^{-\beta(\lambda - t)^2} d\lambda \cdot \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\pi^2}}$$

Intanto, nell' integrando l' esponente di e può scriversi:

$$-\alpha s^2 - \beta t^2 + 2(\alpha s + \beta t)\lambda - (\alpha+\beta)\lambda^2;$$

quindi avremo:

$$H = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi} e^{-\alpha s^2 - \beta t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\lambda^2 + 2(\alpha s + \beta t)\lambda} d\lambda.$$

Anche qui, l' esponente dell' integrando si può trasformare, scrivendolo

$$-(\alpha+\beta)\left[\lambda - \frac{\alpha s + \beta t}{\alpha+\beta}\right]^2 + \frac{(\alpha s + \beta t)^2}{\alpha+\beta},$$

ed ove si ponga:

$$\lambda - \frac{\alpha s + \beta t}{\alpha + \beta} = \mu \quad ; \quad d\lambda = d\mu$$

notando che i limiti d'integrazione restano invariati, si avrà ancora

$$H = e^{-\alpha s^2 - \beta t^2 + \frac{(\alpha s + \beta t)^2}{\alpha+\beta}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\alpha+\beta)\mu^2} d\mu \quad \cdot \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\pi}$$

Qui l' integrale è, in valore, eguale a $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+\beta}}$; sicchè resta in definitiva:

$$H = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)\pi}} \cdot e^{-\alpha s^2 - \beta t^2 + \frac{(\alpha s + \beta t)^2}{\alpha+\beta}}$$

Ma una semplice verifica mostra che l' esponente è questa volta eguale a

$$-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}(s-t)^2;$$

dunque resta in definitiva [1])

$$H = p(s-t, \gamma) \qquad \text{con} \qquad \gamma = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \quad ; \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

Resta aperto il problema di caratterizzare tutte le altre soluzioni delle C e più generalmente quelle di

$$p(s, t, \gamma, \gamma', \ldots) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(s, \lambda; \alpha, \alpha', \ldots) p(\lambda, t; \beta, \beta' \ldots) d\lambda \qquad \text{(D)}$$

7. Nelle stesse ipotesi ora svolte, il caso delle probabilità numerabili (cioè scala infinita nei due sensi, discreta) conduce a problemi ed a risultati analoghi.

Si ha allora una matrice infinita, nei due sensi, delle p_{ij}, le quali devono risultare dipendenti *solo* dalla differenza degli indici: $p_{i,j} = p_{i-j}$.

Per le p sussistono allora le equazioni:

$$p_r(\gamma) = \sum_\rho p_\rho(\alpha) p_{r-\rho}(\beta).$$

Se colleghiamo, formalmente almeno, le p alla serie di LAURENT $\sum_{-\infty}^{+\infty} p_r(\alpha)\xi^r = F(\xi, \alpha)$ le equazioni diventano, scritte nelle F, semplicemente:

$$\begin{cases} F(\xi, \gamma) = F(\xi, \alpha) \cdot F(\xi, \beta) \quad ; \quad \gamma = \Psi(\alpha, \beta) \\ F(1, \alpha) = F(1, \beta) = \ldots = 1. \end{cases}$$

Cambiando, ove occorra i parametri, ponendoli quindi funzioni di altri, potremo sempre ridurci a

$$F(\xi, \gamma) = F(\xi, \alpha) F(\xi, \beta) \quad ; \quad \gamma = \alpha + \beta.$$

La soluzione di quest' ultima equazione è ovviamente:

$$F(\xi, \alpha) = e^{\alpha\varphi(\xi)} \quad ; \quad e^{\alpha\varphi(1)} = 1 \ ;$$

essendo del resto $\varphi(\xi)$ arbitraria con $\varphi(1) = 0$ soltanto.

Una soluzione particolare si ha ponendo, ad esempio $\varphi(\xi) = \xi + \frac{1}{\xi} - 2 = \left(\sqrt{\xi} - \frac{1}{\sqrt{\xi}}\right)^2$; e da essa si trae

$$F(\xi, \alpha) = e^{\alpha\left(\xi + \frac{1}{\xi} - 2\right)} = e^{\alpha\xi} \cdot e^{\frac{\alpha}{\xi}} e^{-2\alpha}.$$

---

[1]) Chiamando $\frac{1}{\alpha}$ *l'imprecisione* della misura, il risultato avuto può esprimersi dicendo che l' imprecisione di una misura mediata è la somma delle imprecisioni delle singole misure immediate che successivamente la costituiscono.

I coefficienti dello sviluppo di quest' ultima in serie di ξ e $\frac{1}{\xi}$ rappresentano delle $p_r(\alpha)$ soddisfacenti alle condizioni poste; ora

$$F(\xi, \alpha) = \left\{ \sum_0^\infty \frac{\alpha^m}{m!} \xi^m \cdot \sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} \xi^{-n} \right\} e^{-2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} p_r(\alpha) \xi^r .$$

Si ha dunque:

$$\begin{cases} p_0(\alpha) = e^{-2\alpha} \sum_0^\infty \frac{\alpha^{2n}}{(n!)^2} \\ p_1(\alpha) = e^{-2\alpha} \sum_0^\infty \frac{\alpha^{2n+1}}{n!(n+1)!} = p_{-1}(\alpha) \\ p_2(\alpha) = e^{-2\alpha} \sum_0^\infty \frac{\alpha^{2n+2}}{n!(n+2)!} = p_{-2}(\alpha) \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

come *una* delle soluzioni possibili.

Ricerche statistiche sulle cause di morte nella popolazione italiana ed in una collettività di assicurati sulla vita.

Nota del dott. **G. de Meo**, *presentata dal socio corrispondente* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — In base a dati dell' Istituto Centrale di Statistica del Regno e dell' Istituto Nazionale delle Assicurazioni, si sono costruiti quozienti di mortalità specifici per diversi gruppi di cause, che si riferiscono perciò alla popolazione generale del Regno e ad una massa di assicurati. Nella nota si effettua un' analisi della mortalità desunta da tali quozienti in rapporto al diverso comportamento delle cause di morte nella popolazione complessiva ed in quella degli assicurati.

I. Premesse generali.

1. Nel campo teorico ed in quello essenzialmente pratico, ha una importanza considerevole la conoscenza del diverso peso che hanno le varie cause di morte nel determinare l'eliminazione degli individui costituenti una popolazione. Dal punto di vista teorico, è interessante, ad esempio, poter determinare le probabilità di morte alle varie età, per una data causa, in seno ad una certa popolazione, allo scopo sopratutto di scorgere eventuali caratteristiche che si possono riconnettere al sesso o a presumibili fattori influenti in un determinato senso. Dal punto di vista pratico — ad esempio per l'industria assicurativa — è interessante conoscere con quale probabilità si producono le morti per una data causa in una massa di assicurati; vedere se e perchè esistono divergenze con le corrispondenti probabilità di morte della popolazione in complesso considerata; analizzare infine le eventuali cause di tali divergenze.

Come vedremo meglio in seguito, elemento base e caratteristico è che la massa degli assicurati presenta caratteri sociali, economici, sanitari ecc. notevolmente differenti da quelli della popolazione in complesso considerata: e di conseguenza essa presenta anche una sua specifica mortalità per cause.

Lo studio della mortalità per cause di morte, può, fra l'altro, esser condotto determinando *probabilità di morte specifiche*. Vediamo come possono determinarsi tali probabilità.

Sappiamo che:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x}$$

appresenta la probabilità che un individuo di età precisa x muoia prima i raggiungere l'età $x+1$, avendo indicato con le usuali notazioni il nuero dei morti in età da x a $x+1$ e dei sopravviventi all'età x nella opolazione stazionaria corrispondente alla tavola di mortalità generale.

Poniamo ora:

M_x = n.° dei morti in età x, $x+1$ in tutta la popolazione nel periodo di sservazione delle morti considerato per la costruzione della tavola generale;

M_{ix} = n.° dei morti in età x, $x+1$ per la causa i in tutta la popolaione e nel medesimo periodo (i variab. fra $a, b, \dots s$ dove $a, b, \dots s$ deotano le diverse cause di morte).

Allora il rapporto $\frac{M_{ix}}{M_x}$ si può considerare come esprimente la probailità che scelto a caso un morto in età x fra gli M_x nel periodo anzidetto, sso sia stato eliminato per la causa i.

Possiamo quindi porre:

$$d_{ix} = d_x \cdot \frac{M_{ix}}{M_x}, \qquad [1]$$

he rappresenta il numero probabile dei morti fra x ed $x+1$ anni per la ausa i, supposto che i morti della tavola generale si eliminino con la stessa equenza relativa riscontrata nella popolazione reale nel periodo che ha ervito di base per la costruzione della tavola.

Sommando le [1], ed osservando che $\sum_{i=a}^{s} \frac{M_{ix}}{M_x} = 1$, si ha, evidentemente:

$$d_x = \sum_{i=a}^{s} d_{ix}, \qquad [2]$$

quindi:

$$q_x = \sum_{i=a}^{s} q_{ix}, \qquad [3]$$

n cui abbiamo posto $q_{ix} = \frac{d_{ix}}{l_x}$. Questo rapporto, per la [1], può, d'altra arte, scriversi anche:

$$q_{ix} = q_x \cdot \frac{M_{ix}}{M_x} \qquad [4]$$

$_{ix}$ costituisce la probabilità che un morto in età da x a $x+1$ sia stato liminato per la causa denotata con i.

In base a siffatte probabilità o *quozienti specifici di mortalità* si po-

trebbe costruire una *tavola di eliminazione* partendo da una generazione fittizia di 10.000 o 100.000 individui di età 0 [1]).

2. In questo lavoro presentiamo i quozienti q_{ix} innanzi definiti separatamente per i M (Tabella I) e per le F (Tabella II) avendo preso di base le più recenti tavole di mortalità costruite dall'Istituto Centrale di Statistica [2]) ed i morti del triennio 1930-32 classificati per cause [3]), che, in complesso, servirono per la costruzione di detta Tavola.

Per quanto riguarda gli assicurati, i dati grezzi delle cause dei decessi ed i quozienti globali di mortalità q_x si riferiscono alle morti verificatesi nel periodo 1927-31 fra gli assicurati (contratti con visita medica) dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni [4]).

I quozienti q_{ix} sono stati calcolati per la popolazione relativamente a 31 grandi categorie ottenute mediante opportuna scissione dei grandi gruppi di cause considerati dalla Nomenclatura Nosologica Ufficiale del 1930.

Per quanto riguarda gli assicurati, invece, a causa del numero relativamente molto più ristretto delle osservazioni, si sono potute considerare soltanto 11 categorie [5]) di cause di morte.

---

[1]) Citiamo le seguenti tavole di mortalità per cause di morte costruite da vari AA.: G. MORTARA, *Tavole di mortalità per cause di morte per la popolazione italiana* (1901-10) in « Annali di Statistica », Serie V. Vol. 7. PEARL, *The biology of death*. BOLDRINI, *La diminuzione della mortalità e la selezione dei rischi assicurativi*, in « Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni », Vol. I, Roma, 1928.

[2]) ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO, *Tavole di mortalità della popolazione italiana* 1930-32, in: « Bollettino Mensile di Statistica dell' Istituto Centrale di Statistica del Regno d' Italia», dicembre 1934, Fasc. 12, Relazione del Prof. L. GALVANI.

Poichè i decessi, nelle statistiche per le cause di morte, sono raggruppati da 6 a. in poi per quinquenni, è stato necessario anzitutto calcolare *quozienti quinquennali* considerando gli l_x della tavola di mortalità ogni cinque anni, determinando i morti entro il periodo x, $x + 5$ per modo da ottenere $q_{x+5} = \frac{d_{x+5}}{l_x}$ (cfr. GINI e GALVANI, *Tavole di mortalità della popolazione italiana*, in: « Annali di Statistica », Vol. VIII, Serie VI, p. 132).

[3]) ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO, *Statistica delle cause di morte*, Anni 1930-31-32.

[4]) ISTITUTO NAZIONALE DELLE ASSICURAZIONI, *Relazione sull' andamento della gestione nel quinquennio* 1927-31, Roma 1933.

[5]) Le categorie di morte considerate per gli assicurati sono le seguenti:

1. Tubercolosi in tutte le sue forme, 2. Altre malattie infettive, 3. Tumori maligni, 4. Malattie del sistema nervoso, 5. Malattie dell' apparato circolatorio, 6. Malattie dell' apparato respiratorio, 7. Malattie dell' apparato digerente, 8. Malattie dell' apparato genito-urinario, 9. Suicidio, 10. Altre morti violente ed accidentali, 11. Tutte le rimanenti cause di morte.

II. La mortalità per cause nella popolazione

3. I quozienti di mortalità q_{ix} contenuti nelle tabelle I e II sono ri-
ortati nel grafico I [1]). L' esame di questo, permette anzitutto di fare le
:guenti considerazioni di carattere generale:

1.°) Le probabilità di morte per le varie cause, nell'insieme conside-
ıte, presentano notevolissime differenze. Un semplice sguardo alle spezzate,
ı infatti immediatamente l' idea della enorme forza letale di alcune ma-
.ttie e della relativa scarsa importanza di altre: cosa, del resto, che trova
.scontro nella più comune osservazione;

2.°) La mortalità femminile solo in qualche caso è praticamente eguale
quella maschile: più spesso vi è un divario apprezzabile, e talvolta le
ifferenze sono sensibili;

3.°) La grande maggioranza delle malattie presenta quozienti più ele-
ati nelle classi avanzate di età. Altre, caratteristiche dell' infanzia, pre-
entano i massimi quozienti nelle età infantili; altre infine, caratteristiche
el periodo immediatamente successivo alla pubertà, come la tubercolosi,
resentano i quozienti più elevati appunto in tali età;

4.°) Per alcune cause di morte — e ciò sembra di notevole interesse —
ascorsa una certa età (70-75 anni), le probabilità di morte, decrescono in
ıaniera sensibile. Ritorneremo più avanti su questo argomento.

Esaminiamo ora singolarmente qualcuno dei gruppi studiati che pre-
enta notevole importanza o particolari caratteristiche.

1) *Tubercolosi dell' apparato respiratorio (Cat. 4)*. Per i *M* i quozienti
rescono rapidissimamente dalle età 10-14, fino a toccare il massimo sui
5-29 a.: da quest' età discendono prima lentamente e poi con sempre mag-
iore rapidità. Per le *F*, invece, che presentano quozienti sensibilmente più
levati dei *M* dai 5 fino ai 25 a., il massimo cade sui 20-24 a.: da 30-34 a.
ı poi, si ha una netta prevalenza di mortalità maschile. Per cercare di
piegare questo andamento dei quozienti, si possono prospettare le seguenti
ootesi:

a) la T. p. essendo una malattia che spesso colpisce l'organismo che
bbia appena raggiunto l' assetto adulto, produce una più precoce mortalità
elle *F* che più presto, in generale, raggiungono tale assetto. Sembra ac-
ertato, d' altra parte, che, per lo meno relativamente alla popolazione ita-
ana, le *F* siano più soggette dei *M* ad eliminarsi per T. p. [2]);

---

[1]) Si tenga presente che in questo grafico, per ragioni di spazio, le spezzate
elative alle seguenti categorie: 7, 11, 13, 14, 15, 16, sono tutte costruite in scala
0 volte più grande (1 unità = 2 mm.) di quella usata per le rimanenti categorie
1 unità = 20 mm.).

[2]) Istituto Centrale di Statistica del Regno d' Italia, *Statistica delle
ause di morte negli anni* 1931-32, Parte I, Introduzione, p. 36.

Tabella I. QUOZIENTI SPECIFICI DI MORTALITÀ (moltiplicati per 1000) PER CAUSE DI MORTE M 1930-32

Età	Cause di morte														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2.61	0.03	1.83	0.28	0.93	2.76	0.03	0.91	0.27	—	0.05	5.49	0.19	—	19.01
1	3.87	0.09	0.98	0.30	0.92	0.97	0.03	0.62	0.24	—	0.01	1.52	0.10	0.03	10.64
2	1.93	0.14	0.39	0.14	0.56	0.55	0.05	0.21	0.10	—	0.01	0.74	0.05	0.01	3.38
3	1.32	0.14	0.21	0.09	0.14	0.35	0.05	0.10	0.08	—	0.01	0.44	0.05	0.01	1.64
4	0.92	0.13	0.13	0.06	0.42	0.29	0.04	0.07	0.07	. .	0.01	0.33	0.07	. .	0.92
5	1.47	0.61	0.29	0.27	1.43	0.94	0.14	0.40	0.24	—	0.02	0.76	0.41	0.01	1.83
10	0.30	0.74	0.20	0.43	1.08	0.78	0.13	0.39	0.17	—	0.03	0.55	0.54	0.01	0.90
15	0.09	1.34	0.39	3.03	1.27	0.71	0.21	0.38	0.18	. .	0.06	0.67	0.78	0.02	1.91
20	0.06	1.18	0.45	6.12	1.49	0.70	0.28	0.37	0.20	0.01	0.10	0.77	0.79	0.03	2.46
25	0.04	1.05	0.39	6.91	1.18	0.75	0.37	0.33	0.20	0.03	0.16	0.78	0.95	0.05	2.21
30	0.03	0.55	0.41	6.89	0.92	0.83	0.71	0.41	0.20	0.07	0.29	1.13	1.43	0.08	2.83
35	0.02	0.36	0.57	6.49	0.93	1.15	1.18	0.49	0.21	0.12	0.62	1.39	2.17	0.09	3.74
40	0.02	0.38	0.73	6.04	0.93	1.33	2.16	0.59	0.27	0.22	1.25	1.56	2.97	0.16	4.76
45	0.02	0.41	0.85	5.87	0.84	1.64	3.89	0.89	0.39	0.25	2.54	1.73	4.63	0.32	5.96
50	0.01	0.40	1.06	5.55	0.82	1.81	6.53	1.37	0.48	0.28	5.10	2.05	7.52	0.58	7.82
55	0.02	0.46	1.53	5.14	0.88	2.29	10.14	2.04	0.57	0.39	9.65	2.81	12.53	1.15	10.74
60	0.01	0.43	2.02	4.38	0.85	2.66	14.93	2.92	0.73	0.42	18.64	3.72	22.10	2.41	15.13
65	0.01	0.42	3.16	3.59	0.87	3.28	19.85	4.01	0.77	0.49	33.81	5.72	37.28	4.46	23.19
70	0.01	0.35	4.84	2.37	0.72	3.88	23.02	4.55	0.62	0.44	58.26	7.37	64.13	8.12	33.21
75	0.03	0.30	7.37	1.43	0.50	4.51	21.22	4.67	0.46	0.34	86.14	9.49	96.92	13.93	46.01
80	—	0.11	9.72	0.67	0.32	5.24	15.29	3.67	0.25	0.14	100.43	9.01	120.03	20.99	54.06
85	—	0.03	12.20	0.41	0.46	5.41	11.03	2.76	0.33	0.19	92.05	8.24	129.69	26.56	57.69
90	—	—	12.32	0.31	0.16	4.77	6.47	1.39	0.31	—	61.73	4.93	134.38	30.18	50.48

Segue: *Tabella I.* QUOZIENTI SPECIFICI DI MORTALITÀ (moltiplicati per 1000) PER CAUSE DI MORTE *M* 1930-32

Età	Cause di morte															
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	5.09	40.03	0.66	0.13	0.42	0.32	0.56	0.08	—	0.33	0.05	32.50	—	—	0.33	0.43
1	1.80	14.27	0.23	0.06	0.13	0.24	0.58	0.03	—	0.13	0.03	0.12	—	—	0.88	0.15
2	0.62	2.49	0.07	0.03	0.10	0.14	0.49	0.02	—	0.05	0.04	0.04	—	—	0.83	0.06
3	0.29	0.81	0.05	0.02	0.10	0.13	0.36	0.02	—	0.03	0.04	0.03	—	—	0.57	0.04
4	0.19	0.44	0.04	0.02	0.09	0.10	0.28	0.01	—	0.03	0.03	0.02	—	—	0.39	0.04
5	0.34	0.79	0.10	0.05	0.52	0.21	0.65	0.04	—	0.08	0.23	0.07	—	—	1.35	0.12
10	0.16	0.29	0.07	0.04	0.59	0.09	0.32	0.04	—	0.08	0.26	0.07	—	0.03	1.41	0.11
15	0.29	0.19	0.08	0.08	0.67	0.07	0.33	0.03	—	0.10	0.15	0.01	—	0.32	2.09	0.20
20	0.44	0.21	0.22	0.13	0.72	0.11	0.36	0.05	—	0.10	0.06	. .	—	0.68	2.49	0.19
25	0.39	0.24	0.43	0.20	0.68	0.09	0.48	0.09	—	0.12	0.06	—	—	0.75	2.58	0.24
30	0.51	0.25	0.59	0.38	0.72	0.10	0.64	0.11	—	0.11	0.06	—	—	0.82	2.56	0.36
35	0.66	0.32	0.76	0.66	0.82	0.13	0.79	0.19	—	0.14	0.07	. .	—	0.85	2.60	0.54
40	0.87	0.38	0.79	1.20	0.94	0.11	1.13	0.23	—	0.19	0.06	. .	—	1.19	2.78	0.63
45	1.23	0.55	0.93	1.94	1.05	0.17	1.52	0.37	—	0.29	0.07	—	—	1.45	3.05	0.90
50	1.61	0.84	1.18	2.85	1.36	0.17	2.16	0.52	—	0.35	0.10	—	—	1.74	3.42	1.26
55	2.39	1.30	1.44	3.95	1.80	0.24	3.03	1.01	—	0.46	0.15	—	—	1.90	3.74	1.80
60	3.07	2.18	1.77	4.87	2.30	0.27	4.28	2.17	—	0.66	0.16	—	1.36	1.74	4.19	2.32
65	4.72	3.79	1.96	5.46	3.10	0.36	6.52	4.22	—	0.93	0.18	—	4.86	1.57	4.57	3.18
70	6.85	6.47	2.26	5.53	4.64	0.43	8.89	8.33	—	1.44	0.33	—	20.59	1.45	5.11	4.22
75	9.77	9.80	2.39	4.62	5.25	0.66	11.32	13.10	—	2.24	0.28	—	64.05	1.62	5.92	5.44
80	13.66	12.38	2.00	3.51	5.50	0.70	11.61	16.49	—	2.75	0.31	—	169.93	1.27	6.05	6.12
85	15.47	13.73	1.89	2.43	5.32	0.63	11.98	16.74	—	3.52	0.11	—	313.83	1.04	5.10	6.91
90	18.01	12.62	2.15	0.77	4.62	0.92	7.55	16.32	—	4.62	—	—	473.80	1.08	6.00	5.54

Tabella II. QUOZIENTI SPECIFICI DI MORTALITÀ (moltiplicati per 1000) PER CAUSE DI MORTE F 1930-32

Età	Cause di morte														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	2.62	0.03	1.52	0.24	0.79	2.47	0.03	0.74	0.26	—	0.04	4.72	0.18	—	15.25
1	3.70	0.10	0.94	0.28	0.84	1.04	0.03	0.63	0.25	—	0.01	1.36	0.10	0.02	9.96
2	2.01	0.15	0.38	0.12	0.53	0.49	0.03	0.21	0.10	—	0.01	0.65	0.06	0.02	3.40
3	1.30	0.13	0.20	0.08	0.44	0.34	0.04	0.11	0.06	. .	0.01	0.38	0.06	0.01	1.64
4	0.91	0.16	0.13	0.07	0.38	0.26	0.03	0.06	0.05	—	. .	0.30	0.07	. .	0.91
5	1.66	0.81	0.34	0.37	1.42	0.76	0.10	0.33	0.16	—	0.02	0.69	0.44	0.01	1.85
10	0.35	1.00	0.24	1.20	1.28	0.50	0.11	0.38	0.13	—	0.03	0.46	0.68	0.01	0.98
15	0.13	1.42	0.35	5.95	1.56	0.47	0.16	0.33	0.17	—	0.05	0.47	0.87	0.03	1.36
20	0.08	1.26	0.33	8.50	1.58	0.65	0.22	0.33	0.21	—	0.08	0.50	1.04	0.04	1.56
25	0.05	1.07	0.39	8.09	1.32	0.77	0.42	0.34	0.23	. .	0.14	0.52	1.33	0.05	1.92
30	0.03	0.83	0.45	6.47	1.13	0.83	0.92	0.40	0.28	0.02	0.22	0.66	1.71	0.05	2.13
35	0.04	0.66	0.49	5.26	0.99	1.00	2.04	0.55	0.31	0.03	0.49	0.83	2.39	0.08	2.54
40	0.02	0.60	0.60	4.47	0.96	0.90	3.62	0.73	0.35	0.04	1.06	0.92	3.39	0.14	2.94
45	0.03	0.56	0.63	3.93	0.92	0.92	5.75	0.99	0.40	0.04	2.39	1.20	4.96	0.26	3.28
50	0.01	0.49	0.78	3.26	0.91	1.08	7.90	1.52	0.43	0.04	4.71	1.45	8.01	0.52	4.78
55	0.01	0.49	1.23	2.90	0.99	1.40	10.59	2.41	0.53	0.05	8.33	1.96	13.52	1.03	7.48
60	0.01	0.47	1.90	2.89	1.00	1.49	13.80	2.89	0.63	0.04	15.39	2.54	24.23	2.57	12.10
65	0.02	0.38	2.97	2.60	0.97	2.21	17.81	4.10	0.67	0.06	28.11	3.67	43.45	4.72	20.02
70	0.02	0.28	5.12	1.85	0.76	2.97	20.10	4.71	0.44	0.05	48.63	5.23	71.70	8.86	31.07
75	0.05	0.25	8.06	1.19	0.75	4.09	19.93	4.88	0.36	0.05	70.80	6.75	107.25	14.17	42.86
80	0.02	0.10	10.85	0.79	0.66	5.59	16.42	4.10	0.27	0.03	79.62	7.19	129.42	20.95	50.59
85	0.09	0.16	13.17	0.38	0.45	6.61	12.97	3.23	0.20	—	75.45	6.97	139.73	23.88	54.52
90	—	—	15.01	0.22	0.22	8.29	9.42	1.79	0.33	—	55.35	5.83	127.06	21.09	51.76

Segue: *Tabella II.* Quozienti specifici di Mortalità (moltiplicati per 1000) per cause di morte *F* 1930-32

Età	Cause di morte															
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
0	4.45	37.63	0.63	0.10	0.21	0.26	0.51	0.09	—	0.30	0.04	28.45	—	—	0.32	0.37
1	1.70	15.59	0.23	0.07	0.08	0.26	0.65	0.06	—	0.13	0.02	0.15	—	—	0.69	0.16
2	0.60	2.75	0.08	0.02	0.08	0.13	0.43	0.02	—	0.07	0.03	0.03	—	—	0.72	0.06
3	0.30	0.83	0.05	0.02	0.07	0.15	0.32	0.01	—	0.05	0.04	0.02	—	—	0.48	0.05
4	0.17	0.45	0.04	0.01	0.09	0.11	0.24	0.01	—	0.03	0.03	0.02	—	—	0.31	0.03
5	0.36	0.85	0.12	0.05	0.53	0.29	0.62	0.02	—	0.06	0.13	0.07	—	—	0.78	0.10
10	0.18	0.32	0.06	0.03	0.42	0.09	0.33	0.02	—	0.05	0.15	0.07	—	0.01	0.39	0.07
15	0.28	0.23	0.06	0.06	0.41	0.06	0.37	0.06	0.30	0.05	0.05	. .	—	0.30	0.39	0.10
20	0.31	0.25	0.10	0.11	0.53	0.08	0.54	0.18	1.35	0.07	0.02	. .	—	0.37	0.41	0.12
25	0.34	0.26	0.14	0.18	0.62	0.08	0.66	0.27	1.86	0.06	0.03	—	—	0.34	0.41	0.14
30	0.34	0.28	0.18	0.32	0.66	0.09	0.81	0.35	2.11	0.08	0.04	—	—	0.26	0.42	0.18
35	0.38	0.38	0.22	0.52	0.80	0.09	1.13	0.45	2.24	0.10	0.04	—	—	0.28	0.43	0.24
40	0.49	0.43	0.31	0.75	0.82	0.11	1.36	0.54	1.33	0.13	0.03	—	—	0.32	0.51	0.33
45	0.63	0.59	0.41	1.09	0.86	0.09	1.80	0.62	0.18	0.13	0.04	—	—	0.32	0.58	0.45
50	0.86	0.84	0.56	1.51	1.08	0.12	2.42	0.53	0.02	0.17	0.06	—	—	0.35	0.69	0.56
55	1.38	1.23	0.69	1.88	1.31	0.17	3.18	0.52	—	0.27	0.06	—	—	0.37	0.94	0.99
60	2.01	2.02	0.87	2.49	1.80	0.20	4.66	0.68	—	0.17	0.10	—	1.78	0.31	1.20	1.38
65	3.32	3.74	1.19	3.07	2.40	0.23	6.36	0.79	—	0.55	0.18	—	5.46	0.32	1.71	2.04
70	5.55	6.08	1.56	3.12	3.07	0.35	8.50	1.13	—	0.82	0.25	—	23.54	0.32	2.36	2.72
75	8.29	9.58	1.69	3.32	3.85	0.49	10.02	1.39	—	1.32	0.24	—	72.58	0.33	3.74	3.96
80	12.06	12.17	2.02	2.54	3.76	0.55	10.20	1.61	—	1.98	0.38	—	177.19	0.35	4.59	4.51
85	14.99	13.87	1.99	1.75	3.38	0.63	9.68	1.68	—	2.13	0.81	—	315.44	0.29	5.29	5.73
90	19.61	12.89	1.01	1.35	2.69	0.67	8.18	1.79	—	1.46	—	—	471.38	0.33	3.92	7.81

b) dopo il 30° anno, per i *M*, la mortalità risulterebbe notevolmente superiore a quella delle *F*, per la circostanza che verrebbero colpiti con maggior frequenza gli individui *M* che furono prima risparmiati. Si potrebbe anche ragionevolmente porre l' ipotesi che la maggiore mortalità maschile dal 30° anno in poi, sia originata, per lo meno in parte, dal maggior logoramento cui sarebbe sottoposto l' organismo maschile per l' ambiente di lavoro e di disagi nel quale è costretto a vivere e che causerebbe quindi una notevole mortalità fra i soggetti maggiormente predisposti a questa forma morbosa.

2) *Tumori maligni (neoplasie) (Cat. 7)*. L'andamento di questa spezzata ricorda in modo accentuato una curva binomiale mancante di una parte del ramo discendente a destra. Risulterebbe manifesto, che la mortalità per t. m., intorno alle età 70-75 a. subisce un arresto e regredisce fino agli 85-90 a. con rapidità approssimativamente eguale a quella con la quale aumenta dai 50 a. in poi. Questo fatto trova del resto riscontro nell'andamento dei quozienti specifici di mortalità calcolati sulla popolazione *censita* [1]).

La maggiore mortalità femminile nel periodo 35-55 a. potrebbe forse mettersi in relazione alle funzioni procreatrici della donna che sembra soggetta — in base ai quozienti ottenuti sulla popolazione censita [2]) — ad una maggiore mortalità (complessiva) per tumori maligni proprio a causa delle localizzazioni alle mammelle e agli organi genitali.

3) *Malattie reumatiche, della nutrizione, delle glandole endocrine ed altre malattie generali (Cat. 8)*. — Anche l'andamento di questa spezzata, dai 5 a. in poi, richiama l'andamento di una curva binomiale mancante di una parte del ramo discendente a destra. Il massimo di mortalità per i *M* e per le *F*, cade sui 75-79 a., mentre nel tratto 5-30 i quozienti hanno andamento pressochè costante. I quozienti annuali da 0 a 4 a. decrescono rapidamente, e dai 35 a. in poi, si nota un'eccedenza di mortalità femminile.

4) *Malattie del fegato (Cat. 19)*. — L'andamento complessivo delle spezzate presenta una certa analogia con quelle dei tumori maligni: infatti anche quì si nota che i quozienti, dopo un massimo, decrescono con una certa regolarità e simmetria rispetto ai quozienti delle età che precedono il massimo.

5) *Malattie della gravidanza, parto e puerperio (Cat. 24)* — L'andamento di questi quozienti è ovviamente in stretta correlazione col periodo fecondo della donna che in generale comincia ad affievolirsi dall' età di 35-40 a. e si annulla del tutto all'età della menopausa. Trascorsa una certa età, nella quale si verifica il maximum di prolificità, si ha dunque

---

[1]) Cfr.: Istituto Centrale di Statistica del Regno d' Italia, *Statistica delle cause di morte negli anni* 1931-32, Parte I, Introduzione, pag. 47.

[2]) Cfr. nota precedente.

. attenuarsi della mortalità perchè diminuiscono di molto le probabilità
l verificarsi dell'evento (gravidanza, parto) che rende possibile la morte
r questo gruppo di cause. Ciò spiega il declinare dei quozienti di morta-
à dall'età di 35 a. in poi: ma è ovvio che sarebbe del tutto erroneo
durre che diminuisce, per le donne più anziane, la probabilità di morire
r gravidanza o parto. Infatti, la mortalità commisurata non già al nu-
ero delle donne viventi, ma al numero dei parti, va fortemente aumen-
ndo per le donne anziane [1]), cosa che concorda con la pratica clinica
e insegna esistere un maggior pericolo nei parti delle donne che per
n esser più tanto giovani, hanno perduto l'elasticità dei tessuti degli
gani genitali necessaria per un normale andamento del parto stesso.

6) *Suicidi (Cat. 29).* — La mortalità per suicidi va abbastanza re-
larmente crescendo per i *M* dai 10 ai 55 a., sulla quale età cade il
assimo. I quozienti vanno lentamente degradando e presentano un altro
ccolo massimo relativo sui 75 a. forse dovuto a circostanze accidentali.
ı mortalità delle *F*, al contrario, sale dai 10 ai 20 a., e poi si mantiene
essocchè costante fino all'estremo limite della scala delle età.

Questo andamento dei quozienti può spiegarsi presumibilmente con
considerazioni seguenti: *a*) Per i *M*, l'innalzarsi dei quozienti fino al
ıssimo dei 55 a., può mettersi in relazione, fra l'altro, alle vicissitudini
la vita di lavoro e di affari cui sono soggetti specialmente i *M* delle
ı mature, indotti spesso al suicidio da rovesci di fortuna, fallimenti etc.;
La molto minore responsabilità che ha la donna nella lotta per la vita,
sua maggiore resistenza ai dolori, la maggiore pratica dei precetti della
ligione, il minore logoramento del suo sistema nervoso meno sottoposto
e diuturne fatiche della vita di lavoro specialmente intellettuale, — po-
ebbero considerarsi tutte altrettante cause determinanti la minore fre-
enza dei suicidi fra le donne.

7) *Le rimanenti morti violente ed accidentali (Cat. 30).* — La mag-
ore mortalità dei *M* deve evidentemente mettersi in relazione al fatto
e questi, per la loro attività di lavoro, sono esposti ad un maggior nu-
ero di rischi, mentre le *F*, attendono generalmente ad un'attività casa-
ga che le espone a rischi molto più limitati [2]).

Nell'andamento delle spezzate dai 5 a. in poi — se non erriamo — si
trebbe ravvisare l'effetto combinato di due cause principali determinanti
mortalità per questo gruppo di cause, e cioè: *a*) l'influenza dell'am-
ente; *b*) l'affievolirsi della resistenza organica nelle età avanzate, che
odurrebbe, a sua volta, una maggiore mortalità causata da accidenti
che di lieve entità.

---

[1]) Istituto Centrale di Statistica del Regno, *Statistica delle cause di morte*
31-32, pag. 65.

[2]) *Ibidem*, pag. 83.

Se — come sembra lecito ammettere — si suppongono agire queste due cause in momenti successivi o simultaneamente, si può cercare di interpretare l'andamento delle spezzate. — Per i *M*, infatti, nel periodo dai 10 ai 20 a. che corrisponde al periodo dell'inizio dell'attività di lavoro (influenza dell'ambiente), si produce un forte aumento dei quozienti che si mantengono poi quasi costanti fin verso i 40 a.: dopo tale età, e fin verso i 60 a., perdurando per lo meno in parte l'influenza dell'ambiente, comincia a far sentire il suo peso la diminuita resistenza organica, che avrà poi il sopravvento dai 65 a. in poi, allorquando deve ritenersi scomparsa quasi del tutto l'influenza dell'ambiente (attività del lavoro). — Per le *F*, invece, che sono di gran lunga meno esposte dei *M* all'influenza dell'ambiente nel periodo della giovinezza e della maturità, i quozienti si mantengono pressocchè costanti fin verso i 50 a. e si innalzano poi rapidamente per effetto della affievolita resistenza organica. Queste ipotesi da noi formulate, ci sembrano per lo meno atte a spiegare, sia pure in parte, il fatto, a prima vista incongruente, che la mortalità per morti accidentali continua ad innalzarsi quando l'influenza dell'attività in genere e della lavorativa in ispecie, deve ritenersi, come è certamente per i vecchi, quasi completamente scomparsa.

4. — È quasi superfluo avvertire che le ipotesi che sono state formulate più sopra relativamente a qualcuno dei gruppi studiati, e quelle che ora andremo a prospettare, debbono sempre intendersi limitate strettamente al campo di osservazione. — Si potrebbero, evidentemente formulare conclusioni ed ipotesi più attendibili se indagini analoghe venissero ripetute su più vasta scala.

Abbiamo già accennato che, per alcune cause di morte, i quozienti di mortalità per le età avanzate tendono a decrescere da una certa età in poi fino al limite estremo della scala delle età. Questo andamento, tralasciando quelle oscillazioni che sembrerebbero prodotte da errori accidentali, si manifesta in maniera più o meno accentuata nei seguenti gruppi di cause di morte:

7. Tumori maligni;
8. Malattie reumatiche, della nutrizione, delle glandole endocrine ed altre malattie generali:
19. Malattie del fegato;
11. Apoplessia, congestione, embolia;
12. Altre malattie del sistema nervoso e degli organi dei sensi;
20. Malattie degli intestini e del peritoneo;
22. Nefriti.

Per queste categorie di cause di morte, ma specialmente per le prime tre, appare dunque dai nostri quozienti che all'incirca dopo i 70-80 a., a

conda dei casi, si produce una diminuzione sensibile dei quozienti stessi. ›me abbiamo già osservato, anzi, specialmente per i tumori maligni, le alattie reumatiche e le malattie del fegato, la spezzata dei quozienti corda la forma campanulare di una curva binomiale mancante di una ırte del ramo discendente a destra. Questo fatto potrebbe forse fare affacare l'ipotesi che, trascorsa una certa età, senza che l'organismo sia ato colpito da una di queste malattie, si produce quasi come una immuzzazione dell'organismo stesso per quella determinata malattia. L'orgasmo che sia riuscito a superare questa età che potrebbe chiamarsi itica per la data malattia, sarebbe quindi meno soggetto ad eliminars ›r la detta causa [1]).

III. La mortalità per cause fra gli assicurati e raffronto con quella della popolazione.

5. Eseguito un rapido esame della mortalità per cause nella popolaone, mettiamo ora a raffronto tale mortalità con quella di un gruppo assicurati sulla vita. E cominciamo, innanzi tutto, a considerare la ortalità *globale* rilevata sulle due masse.

Nella Tabella III sono riportati i quozienti di mortalità per numero di ntratti (*MF*) e per capitali (*MF*) relativamente agli assicurati (1927-31) ·ll'Istituto Nazionale delle Assicurazioni [2]) nonchè gli analoghi quozienti

---

[1]) Per quanto riguarda la diminuzione dei quozienti da una certa età in poi r i gruppi 11, 12, 20, 22, è bene considerare anzitutto che alle età avanzate in i ciò si verifica, è molto scarso il numero dei sopravviventi e quindi le decreenze dei quozienti che appaiono dai grafici, possono aver carattere prevalenteente accidentale.

Inoltre, bisogna considerare che le probabilità di morte in questione, potrebbero crescere perchè troppo fortemente crescono le probabilità di morte per « senilità ». ɔn è escluso, infatti, che per le età troppo avanzate, i sanitari siano indotti più cilmente ad errare la denunzia della malattia che ha prodotto la morte: e ciò ı a causa della difficoltà della diagnosi (malattie pregresse allo stato latente), e sia causa della relativa poca importanza che in generale si annette alla morte di rsone molto avanzate di età. C'è da osservare però che questo errore nelle deıncie delle cause di morte, dovrebbe agire uniformemente su tutti i gruppi stuati: e pertanto rimarrebbe da spiegare perchè per la maggioranza dei gruppi non produce alcun abbassamento dei quozienti di mortalità al di là dell' età norale dei morti.

[2]) Tutti i dati e le notizie riportate nel testo relativamente agli assicurati ll' I. N. A, sono stati tolti da: Istituto Nazionale delle Assicurazioni, *Relaɔne sull' andamento della gestione nel quinquennio* 1927-31, Roma, 1933. I quozienti per numero di contratti », non erano pubblicati nella detta Relazione, ma ci furono

per i *M* soltanto della Tavola di Mortalità Italiana 1930-32. Per quanto riguarda le modalità di costruzione delle tre serie, rimandiamo senz'altro il lettore alle fonti da cui esse sono state tratte [1]). Qui dobbiamo però subito avvertire che le serie stesse sono molto imperfettamente paragonabili perchè:

a) Sono difformi le modalità di costruzione dei quozienti per la popolazione e per gli assicurati. C'è da osservare tuttavia, che qualunque diversità sistematica dovrebbe influire presumibilmente nello stesso senso e con la stessa intensità sui quozienti di tutte le età. Viceversa, dal grafico II, sul quale sono riportate le cifre della Tabella III, si desume che le spezzate relative agli assicurati *intersecano* la spezzata della popolazione generale.

b) Il numero delle osservazioni per gli assicurati (6699 decessi) è molto esiguo rispetto a quello relativo alla popolazione generale.

c) I quozienti degli assicurati si riferiscono a *MF*: quelli della popolazione a soli *M*. È da notare, a questo riguardo, che il confronto coi quozienti *MF* della Tavola di mortalità della popolazione, risulterebbe ancor meno attendibile, tenuto conto del fatto che nella massa di assicurati, le *F* rappresentano un'esigua minoranza (9.22 $^0/_0$ del totale); e pertanto, il gruppo medesimo, relativamente al sesso, è meno difforme dalla popolazione maschile, di quanto non lo sia da tutta la popolazione effettiva chè è composta quasi in egual misura di *M* e *F*.

Esaminando il grafico II — a parte le riserve ora formulate — si può dedurre che:

a) la mortalità degli assicurati è più bassa di quella della popolazione fino ai 54 a. per i contratti e fino ai 48 pei capitali, mentre il contrario si verifica al di là delle dette età;

b) i quozienti per capitali assicurati, che non hanno andamento tanto regolare, sono in generale maggiori di quelli relativi ai contratti.

Questi due fatti apparirebbero ovviamente come una conferma di noti fattori influenti sui rischi assicurativi. Infatti, la minore mortalità degli assicurati nelle età meno avanzate, coincidenti, in media, con le età di ingresso in assicurazione, potrebbe attribuirsi all'effetto selettivo della visita medica che elimina buon numero di individui tarati. Alle età più avanzate, l'effetto selettivo della visita medica passata in generale molti anni prima, diverrebbe pressocchè nullo, mentre al contrario interverrebbe l'antiselezione tendente a far conservare in vigore i contratti di individui

---

gentilmente forniti dal Prof. R. Cultrera, Capo Servizio Bilancio Tecnico e Statistica dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni.

[1]) Cfr.: Istituto Centrale di Statistica del Regno, *Tavola di mortalità della popolazione Italiana* 1930-32, cit. e: Istituto Nazionale delle Assicurazioni, *Relazione*, ecc., citata.

Tabella III.

QUOZIENTI ANNUALI DI MORTALITÀ (moltiplicati per 1000) FRA 30 e 65 ANNI NELLA POPOLAZIONE GENERALE *(M)* E FRA GLI ASSICURATI DELL'I. N. A. *(MF)*

Età	Popol. Gen. (Tav. mort. 1930-32)	Assicurati I. N. A.		Età	Popol. Gen. (Tav. mort. 1930 32)	Assicurati I. N. A.	
		N. Contratti	Cap. assic.			N. Contratti	Cap. assic.
30	4.66	3.22	3.31	50	10.63	9.78	11.14
31	4.73	3.25	3.27	51	11.27	10.62	11.58
32	4.81	3.30	3.45	52	11.99	11.53	12.76
33	4.93	3.41	2 60	53	12.79	12.52	13.11
34	5.10	3.56	3.72	54	13.69	13.61	14.18
35	5.30	3.75	3.81	55	14.68	14.82	14.99
36	5.46	3.98	4.02	56	15.93	16.16	16.04
37	5.62	4.23	4.53	57	17.20	17.65	17.03
38	5.85	4.48	5.03	58	18.59	19.26	19.75
39	6.14	4.73	5.38	59	20.08	20.97	21.59
40	6.36	4.97	5.59	60	21.92	22.74	23.36
41	6.54	5.21	6.45	61	23.77	24.59	27.07
42	6.79	5.46	6.53	62	25.64	26.56	29.02
43	7.13	5.75	6.56	63	27.66	28.77	29.01
44	7.52	6.10	7.03	64	30.19	31.42	30.62
45	7.94	6.52	7.78	65	33.19	34.66	33.26
46	8.39	7.03	7.82				
47	8.85	7.62	8 23				
48	9.38	8.28	9.45				
49	9.98	9.01	10.15				

tarati con maggiore frequenza di quella che si riscontrerebbe per gli individui sani. Una forma di antiselezione si manifesterebbe altresì con la quasi sempre maggiore elevatezza dei quozienti per capitali assicurati rispetto ai quozienti per numero dei contratti.

6. In base ai quozienti annuali di mortalità contenuti nella Tabella III, è stato possibile, innanzi tutto, costruire, anche per gli assicurati, i relativi quozienti quinquennali [1]. Questi, sono stati poi assoggettati allo stesso trattamento usato per i quozienti della popolazione generale in base ai dati grezzi sulle cause di morte che erano a nostra disposizione [2]. I risultati delle elaborazioni sono compendiati nella Tabella IV nella quale sono anche riportati i corrispondenti quozienti della popolazione generale [3].

Nella Tabella V sono poi riportati i rapporti (moltiplicati per 100) dei quozienti per cause degli assicurati con i corrispondenti quozienti per cause della popolazione, ossia i valori delle espressioni:

$$\frac{q_{i,x,A}}{q_{i,x,P}} \cdot 100$$

avendo indicato con $q_{i,x,A}$, il quoziente di mortalità per la causa i all'età x fra gli assicurati; e con $q_{i,x,P}$, il corrispondente quoziente specifico nella popolazione generale.

Alle Tabelle IV e V, fanno riscontro i Grafici III e IV.

---

[1]) Tali quozienti sono stati ottenuti con le modalità indicate alla nota [2]) a pag. 5. Soltanto, poichè nella *Relazione* dell' I. N. A. sopra citata, sono riportati i soli q_x, abbiamo posto $l_{30} = 76.885$, che è il numero dei sopravviventi MF a 30 a. indicato dalla Tavola di Mortalità generale. In base a questo numero iniziale di viventi, si sono ottenuti, in base ai quozienti annuali, tutti i seguenti valori di l_x, ed in base a questi ultimi, i quozienti quinquennali.

[2]) Istituto Nazionale delle Assicurazioni, *Relazione*, etc., cit., Appendice, Statistica delle cause di morte.

[3]) Per la popolazione si è potuto, come si è detto, scendere ad una maggiore specificazione delle cause di morte per effetto del gran numero delle osservazioni. Per gli assicurati, invece, tale specificazione ha dovuto arrestarsi molto più presto (cfr. nota 5 a pag. 5). I quozienti contenuti nella Tabella IV, quando non trovano immediato riscontro nella Tabella I, sono stati ottenuti per somma dei quozienti relativi alle singole cause rientranti nella più ampia classe considerata per gli assicurati. Così ad esempio, il quoziente di 7.81 relativo alla tubercolosi per l'età 30 (Tabella IV) è stato ottenuto per somma dei quozienti della stessa età relativi alla tubercolosi pelmonare (6.89) e alla tubercolosi di tutte le altre forme (0.92) (Cfr. Tabella I).

FRA GLI ASSICURATI (*MF: n⁰ dei contratti; capitali assicurati*) E NELLA POPOLAZIONE GENERALE (*M*)

Età	quoz. quinq. di mortalità	Cause di morte 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
		Assicurati — Numero dei Contratti (*MF*)										
30	16.62	3.55	2.64	0.77	0.96	0.88	1.62	1.71	0.69	1.05	1.98	0.77
35	20.99	3.74	3.37	1.22	1.57	1.19	2.60	2.22	1.08	1.19	2.03	0.78
40	27.20	3.38	3.38	2.75	2.70	2.64	2.89	3.52	1.62	1.43	1.73	1.16
45	37.87	3.42	4.22	3.93	4.58	4.15	4.33	4 87	3 09	2.04	1.86	1.38
50	56 71	3.47	4.76	7.46	8.40	8.40	5.11	5.99	4.53	3.29	2.47	1.83
55	85.75	2.93	9 58	12.09	11.79	16.43	9 27	8.36	6.85	3 42	2.21	2.82
60	127.12	3.86	9.97	15.64	21.76	30.36	13.37	12.92	7.25	2.03	3.39	6.57
		Assicurati — Capitali Assicurati (*MF*)										
30	17.23	3.68	2.74	0.80	1.00	0.92	1.68	1.77	0.71	1.08	2.05	0.80
45	22.56	4.02	3.61	1.31	1.69	1.28	2.80	2 39	1.16	1.28	2.18	0.84
40	31.75	3.95	3.95	3.21	3.15	3.08	3.37	4.11	1.89	1.67	2.02	1.35
45	42.68	3 86	4.76	4.43	5.16	4.67	4.88	5.49	3.48	2.30	2.09	1.56
50	61.26	4.83	5 14	8.06	9.08	9.08	5.52	6.48	4.89	3.55	2.66	1.97
55	86.27	2.95	9.63	12.16	11.86	16.53	9.33	8.41	6.89	3.44	2.23	2 84
60	131.59	4.00	10.32	16.19	22.53	31.42	13.84	13.37	7.50	2.11	3.51	6.80
		Popolazione Generale (*M*)										
30	23.99	7.81	1.82	0 71	1.42	1.43	3.42	2.04	0.75	0.82	2.56	1.21
35	28.06	7.42	2.10	1.18	2.01	2.17	4.49	2.69	0.98	0.85	2.60	1.57
40	28.87	6 97	2.46	2.16	2.81	2.97	5.79	3.42	1.36	1.19	2.78	1.97
45	43.75	6.71	2.92	3.89	4.27	4.63	7.51	4.64	1.89	1.45	3.05	2.79
50	58.94	6.37	3.28	6.53	7.15	7.52	10.01	6.40	2.68	1.74	3.42	3.84
55	83.55	6.02	4.30	10.14	12.46	12.53	14.28	8.73	4.04	1.90	3.74	5.41
60	122.69	5.23	5.12	14.93	22.36	22.10	20.61	11.39	6.45	1.74	4.19	8.57

Tabella V.

NUMERI INDICI DEI QUOZIENTI DI MORTALITÀ

DEGLI ASSICURATI I. N. A. - RISPETTO AI CORRISPONDENTI QUOZIENTI DELLA POPOLAZIONE GENERALE

Età	Cause di morte										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	Numero dei Contratti										
30	45	145	108	68	62	47	84	92	128	77	64
35	50	160	103	78	55	58	83	110	140	78	50
40	48	137	127	96	89	50	103	119	120	62	59
45	51	145	101	107	90	58	105	163	141	61	49
50	70	145	114	117	112	51	94	169	189	72	48
55	49	223	119	95	131	65	96	170	180	59	52
60	74	195	105	97	137	65	113	112	117	81	77
	Capitali Assicurati										
30	47	151	113	70	64	49	87	95	132	80	66
35	54	172	111	84	59	62	89	118	151	84	54
40	57	161	149	112	104	58	120	139	140	73	69
45	58	163	114	121	101	65	118	184	159	69	56
50	76	157	123	127	121	55	101	182	204	78	51
55	49	224	120	95	132	65	96	170	181	60	52
60	76	202	108	101	142	67	117	116	121	84	79

L'andamento delle spezzate, mette in luce notevoli differenze fra i quozienti relativi alla popolazione ed i quozienti degli assicurati. Per alcuni gruppi di cause di morte, i quozienti degli assicurati sono notevolmente inferiori a quelli della popolazione; per altri gruppi si verifica il contrario; per altri ancora l'andamento delle spezzate è pressocchè eguale. Più precisamente, possiamo raggruppare i diversi gruppi studiati, nel modo seguente:

a) cause di morte per le quali i quozienti degli assicurati sono a tutte o quasi tutte le età *superiori* a quelli della popolazione (Altre malattie infettive; tumori maligni; apparato genito-urinario; suicidio);

b) cause di morte per le quali i quozienti degli assicurati sono a tutte le età *inferiori* a quelli della popolazione (tubercolosi; apparato respiratorio; altre morti violente; tutte le rimanenti cause di morte);

c) cause di morte per le quali i quozienti degli assicurati sono a qualche età *inferiori* ed a qualche età *superiori* a quelli della popolazione.

Orbene, per cercare di dare una interpretazione più o meno plausibile a questi fatti, conviene anzitutto fissare l'attenzione sui seguenti punti:

1.° La composizione professionale della popolazione di assicurati è sostanzialmente difforme dalla composizione professionale della popolazione generale, il chè significa che le due masse non sono affatto uniformi anche dal punto di vista economico e sociale. Le fortissime differenze esistenti nelle percentuali contenute nella Tabella VI dànno un'idea di ciò che affermiamo, poichè le differenze stesse debbono evidentemente attribuirsi in larga misura alle differenti composizioni delle masse da cui i morti provengono. La massa degli assicurati è costituita dunque prevalentemente dalla classe piú elevata economicamente e socialmente della popolazione (industriali, commercianti, professionisti, ufficiali, impiegati).

2.° La tendenza degli individui tarati ad entrare e permanere in assicurazione (antiselezione) può assumere maggiore o minore importanza nelle diverse malattie, nel senso che per alcune malattie o predisposizioni morbose la selezione all'ingresso può risultare più o meno efficace a seconda del grado di diagnosticabilità delle malattie stesse. Così ad esempio, se possono con una certa relativa facilità diagnosticarsi anomalie cardiache o del sistema circolatorio (pressione arteriosa ecc.), non è altrettanto facile la diagnosi di una neoplasia allo stato iniziale, specialmente quando l'assicurato ha interesse di fuorviare l'indagine clinica.

Tenendo presenti queste osservazioni, consideriamo singolarmente i varii gruppi di cause studiati per gli assicurati:

1. *Tubercolosi in tutte le sue forme.* — Il fatto che gli assicurati presentano una mortalità notevolmente inferiore a quella della popolazione generale, potrebbe in linea d'ipotesi spiegarsi considerando che la massa degli assicurati è reclutata nelle categorie sociali nelle quali è meno diffusa e sopratutto meno letale la tubercolosi, e che inoltre si opererebbe, all'ingresso in assicurazione, una efficace selezione dei rischi.

Tabella VI.

COMPOSIZIONE PERCENTUALE DELLE MORTI NELLA POPOLAZIONE DI ASSICURATI I. N. A. (1927-33) E NELLA POPOLAZIONE GENERALE *(M maggiori di 15 anni nell'anno 1932).*

Professioni	Assicurati I. N. A. [1]	Popolazione Ital. [2]
1. — Ufficiali, impiegati pubblici e privati pensionati, diplomatici	24,22	7,65
2. — Professionisti liberi, culto, artisti. . .	20,23	2,64
3. — Industriali, commercianti	17,01	2,89
4. — Venditori, esercenti, rappresentanti . .	9,88	3,13
5. — Operai	5,32	24,65
6. — Agricoltori	4,43	46,45
7. — Proprietari benestanti	3,98	4,27
8. — Condizioni non professionali	3,86	0,52
9. — Esercito, aeronautica, ed altri corpi armati	3,49	0,70
10. — Personale speciale FF. SS. e addetti ai trasporti	2,73	0,93
11. — Personale subalterno — Stato — Enti Pubblici.	2,45	0,42
12. — Personale fatica e servizio.	1,69	2,44
13. — Condizioni non specificate.	1,72	3,31
	100,—	100,—

[1]) Questi dati sono stati ricavati dallo studio del Dott. F. VICENTINI, *Rilievi Statistici sopra gli assicurati maschi dell' I. N. A. deceduti nel settennio 1927-1933* (portafoglio diretto con visita medica), in « L' Assistenza Sanitaria agli Assicurati dell' I. N. A. », Anno IV, n. 6, 15-12-1935.

[2]) La composizione percentuale delle morti verificatesi nella popolazione durante il 1932 è stata da noi ottenuta sui dati della « Statistica per le cause di morte negli anni 31-32 », cit. dopo avere opportunamente raggruppate le categorie professionali ivi menzionate, allo scopo di ottenere una classificazione sufficientemente paragonabile a quella adottata dal Dott. VICENTINI per gli assicurati.

2. *Altre malattie infettive.* — Si può porre l'ipotesi che la molto ıggiore mortalità degli assicurati sia originata dal fatto che attraverso selezione della visita medica, riescono ad infiltrarsi individui che pur n essendo affetti da alcuna malattia specifica, sono dotati di resistenza ganica deficiente cosa che produrrebbe una forte mortalità allorquando si sono colpiti da queste malattie aventi la caratteristica di investire tto l'organismo.

3. *Tumori maligni.* — La lieve eccedenza di mortalità degli assicuti potrebbe trarre origine dai seguenti fatti: *a*) la massa degli assicurati reclutata dalle categorie sociali nelle quali potrebbe esser più diffuso cancro; *b*) tendenza all'ingresso e permanenza in assicurazione di indidui colpiti da questa malattia.

4.-5. *Sistema nervoso ed apparato circolatorio.* — Poichè l'età media ingresso in assicurazione cade in generale nelle età piuttosto giovali (30-35 a.), si può prospettare l'ipotesi che nelle prime età, appunto r effetto di un'efficace selezione medica, la mortalità è minore per gli sicurati che non per la popolazione generale. Alle età mature, invece, r effetto dell'antiselezione, il rapporto si invertirebbe. In sostanza, per esti due gruppi di cause di morte si riprodurrebbe — salvo alcune oscilzioni che possono avere carattere accidentale — ciò che abbiamo rilevato r la mortalità globale degli assicurati e della popolazione.

6. *Sistema digerente.* — La mortalità degli assicurati non appare tevolmente differente da quella della popolazione.

7. *Apparato genito-urinario.* — La molto maggiore mortalità degli sicurati potrebbe in linea d'ipotesi riconnettersi per lo meno in parte alla mposizione professionale e sociale della massa di assicurati (popolazioni lle grandi città e centri industriali); ed in parte alla non sempre facile agnosticabilità di alcune malattie rientranti in questo gruppo.

8. *Suicidio.* Nell'andamento della mortalità per suicidio fra gli assirati nei confronti della popolazione generale, non può non ravvisarsi il ıto preordinato intendimento di alcuni assicurandi di far trarre un vanggio economico ai loro eredi in seguito al suicidio. Non si esclude affatto, ttavia, che la caratteristica composizione professionale e sociale della assa degli assicurati, non abbia una certa influenza nell'accrescerne la ortalità per suicidio.

9. *Altre morti violente.* La molto minore mortalità degli assicurati r questo gruppo di cause, riteniamo debba trovare la sua spiegazione ecialmente nella diversa composizione professionale della massa degli ascurati. Questa, infatti, è formata in misura molto esigua di operai ed agriltori, fra i quali i soli infortuni sul lavoro, producono una larga falcidia vite: e ciò spiega pertanto come la massa stessa sia meno colpita di anto non lo sia la popolazione in complesso.

10. *Apparato respiratorio.* Potrebbe prospettarsi l'ipotesi che la

massa degli assicurati, essendo formata in prevalenza di una categoria sociale elevata, sia in complesso meno soggetta ai rischi di contrarre malattie dell' albero respiratorio che si può presumere colpiscano con maggiore frequenza gli individui soggetti ai disagi della vita di campagna o dei cantieri e delle officine. Non si esclude, d'altra parte, che la selezione medica all' ingresso possa risultare efficace eliminando quegli individui che per la loro particolare conformazione fisica, vengono considerati insufficientemente resistenti alle affezioni dell' albero respiratorio.

IV. Conclusioni

Le considerazioni che abbiamo fatte nelle pagine precedenti mostrano in primo luogo che per trarre conclusioni alquanto attendibili sul comportamento della mortalità per cause, occorrerebbe innanzi tutto estendere nel tempo e nello spazio le indagini del genere di quella da noi tentata.

D'altra parte, per quanto riflette l'analisi, relativamente alle cause di morte, del fenomeno dell' antiselezione dei rischi assicurativi, sarebbe necessario per lo meno poter paragonare grandi masse di assicurati con grandi masse di non assicurati, omogenee però per quanto riguarda la composizione per professione, livello economico ecc. Solamente in questo modo si potrebbe neutralizzare un elemento perturbatore del confronto che al contrario, sui dati a nostra disposizione, ha fatto sentire in maniera notevole il suo peso.

GRAFICO I (FOGLIO 1)
QUOZIENTI DI MORTALITA' PER CAUSE DI MORTE NELLA POPOLAZIONE ITALIANA 1930-32
Maschi
Femmine
1- Malattie infettive dell'infanzia
2- Infezioni tifoidee
3- Influenza
4-Tubercolosi apparato respiratorio
5-Tubercolosi delle meningi e del sistema nervoso centrale
6- Tutte le altre malattie infettive
7-Tumori maligni
8- Malattie reumatiche, della nutrizione, delle glandole endocrine ed altre malattie generali
9- Malattie del sangue e degli organi ematopoietici
10-Avvelenamenti cronici ed intossicazioni

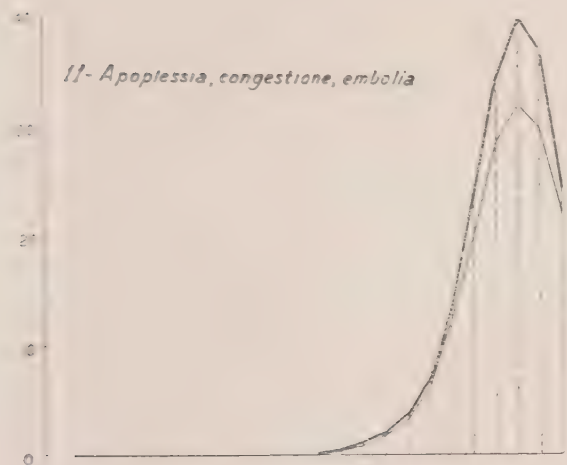
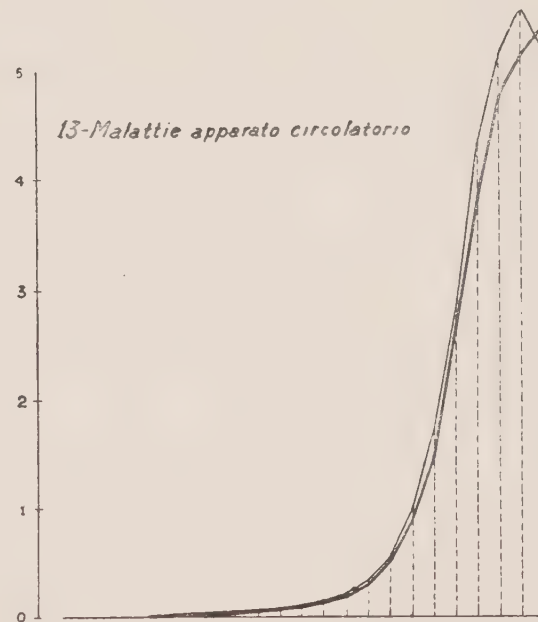
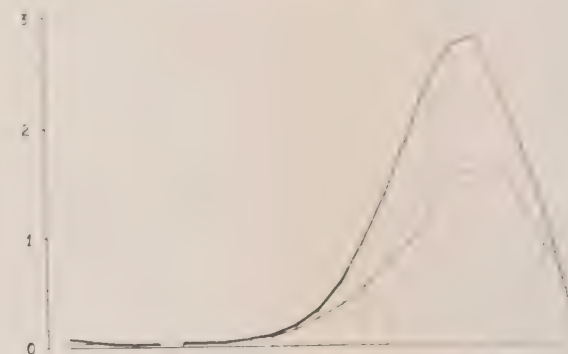
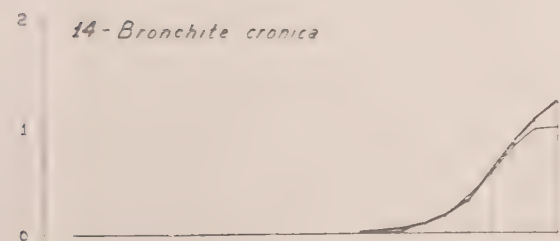
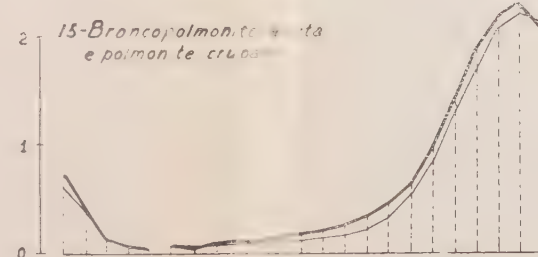
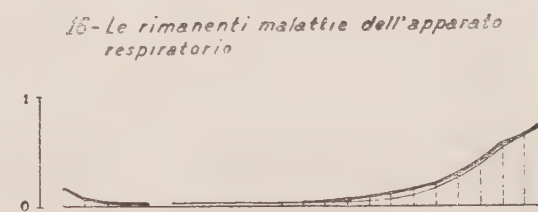
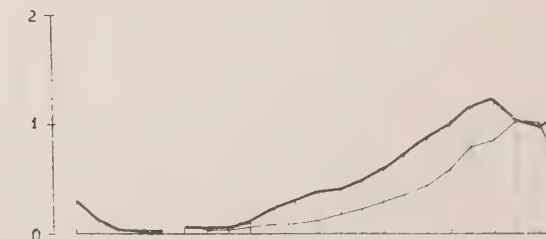
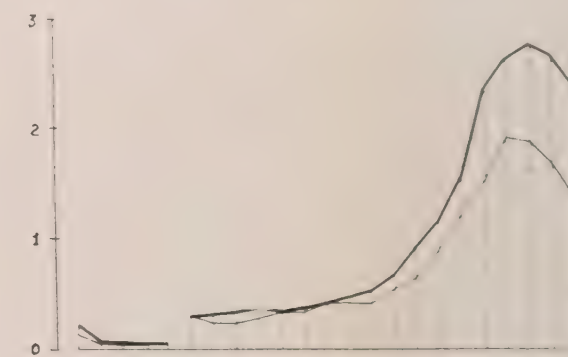



GRAFICO I (FOGLIO 2)

QUOZIENTI DI MORTALITA' PER CAUSE DI MORTE NELLA POPOLAZIONE ITALIANA 1930-32.-

GRAFICO III

QUOZIENTI QUINQUENNALI DI MORTALITA' PER C USE DI MORTE NELLA POPOLAZ NE GENERALE (M 1930-32) E FRA GLI ASSICUR TI I.N.A. (M.F. 1927-31 - CONTRATTI

Comportamento delle forme binarie rispetto ad un sottogruppo del gruppo proiettivo

Nota della dott. **A. Rocco-Boselli**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — Si studia un procedimento simbolico atto a fornire Covarianti ed invarianti di forme binarie rispetto ad un gruppo assegnato, sottogruppo del proiettivo.

1. Sia il gruppo G di sostituzioni lineari

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_0 &= u_{00}\, x'_0 + u_{01}\, x'_1 \\ x_1 &= u_{10}\, x'_0 + u_{11}\, x'_1, \end{aligned}$$ sottogruppo del proiettivo,

caratterizzato dal fatto di lasciare invariata la forma ad una serie di variabili:

$$(2) \qquad A\,(x_0\,, x_1) = A\,(x).$$

Sarà, per le trasformazioni di questo gruppo, e solo per queste:

$$X'_0 = u_{00}\, X_0 + u_{10}\, X_1 \quad , \quad X'_1 = u_{01}\, X_0 + u_{11}\, X_1\,,$$

avendo posto:

$$X_0 = \frac{\partial\, A\,(x)}{\partial\, x_0} \quad , \quad X_1 = \frac{\partial\, A\,(x)}{\partial\, x_1} \quad , \quad X'_0 = \frac{\partial\, A\,(x')}{\partial\, x'_0} \quad , \quad X'_1 = \frac{\partial\, A\,(x')}{\partial\, x'_1}$$

D' altra parte i coefficienti α della forma lineare $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1$ se le x seno sottoposte alle (1), si trasformano secondo le formule:

$$\alpha'_0 = u_{00}\, \alpha_0 + u_{10}\, \alpha_1 \quad , \quad \alpha'_1 = u_{01}\, \alpha_0 + u_{11}\, \alpha_1\,.$$

Si ha perciò il:

Teorema 1. — *Se $A\,(x)$ è un invariante per un gruppo di sostituzioni lineari G, le sue derivate si trasformano come i coefficienti d' una forma lineare, quando le incognite si sottopongono alle medesime trasformazioni; o in altre parole, le X si trasformano contragredientemente alle x.*

2. Posto simbolicamente

$$(3) \qquad f_1\,(x) = \alpha_x^m \equiv \beta_x^m \equiv \gamma_x^m \quad , \quad f_2\,(x) = \lambda_x^n \equiv \mu_x^n \equiv \eta_x^n$$

le formazioni invarianti e simboliche delle (3) sono:

$$(\alpha\,,\beta)\,;\ldots\alpha_x\,;\ldots(xy)\ ;\ (\lambda\,,\mu)\ldots;\lambda_x\ldots \tag{4}$$

alle quali possiamo aggiungere le forme invariantive simboliche:

$$(\alpha\,,X)\ldots(\lambda\,,X)\ldots \tag{5}$$

e i covarianti effettivi:

$$(XY)\ ,\ Y_x,\ldots X_x = A(x). \tag{6}$$

Le formazioni (5) e (6) saranno dette *speciali* del gruppo G; le (6), che non dipendono dai coefficienti di f_1 ed f_2, si diranno covarianti *fondamentali* del gruppo G, perchè essi non dipendono dalle forme, ma solamente dalla forma fondamentale A, che chiameremo *forma gruppale.*

3. Posto

$$X_0^{\,2} = X_0 \Lambda X_0 = \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x_0^{\,2}}\,,\ X_0 \Lambda X_1 = X_1 \Lambda X_0 = \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x_0\,\partial x_1}\ldots X_j \Lambda Y_i = \frac{\partial^2 A(y)}{\partial x_j\,\partial y_i}\,,$$

si ha:

$$\begin{aligned} X'^{\,2}_i &= X_0^{\,2}\,u^2_{0i} + 2X_0 \Lambda X_1\,u_{0i}u_{1i} + X_1^{\,2}\,u^2_{1i} \\ X'_0 \Lambda X'_1 &= X_0^{(2)}u_{01}u_{00} + X_0 \Lambda X_1\,(u_{01}u_{10} + u_{00}u_{11}) + X_1^{(2)}u_{10}u_{11} \\ X'_i \Lambda Y'_j &= X_0 \Lambda Y_0 u_{0i}u_{0j} + X_1 \Lambda Y_0 u_{1i}u_{0j} + X_0 \Lambda Y_1 u_{0i}u_{1j} + X_1 \Lambda Y_1 u_{1i}u_{1j} \end{aligned}$$

Perciò le forme

$$\begin{aligned} &a_{00}X_0^{(2)} + 2a_{01}X_0 \Lambda X_1 + a_{11}X_1^{(2)}\ ;\ a_{00}X_0 \Lambda Y_0 + a_{01}X_0 \Lambda Y_1 + \\ &\qquad + a_{10}X_1 \Lambda Y_0 + a_{11}X_1 \Lambda Y_1 \end{aligned} \tag{7}$$

si trasformano, per sostituzioni appartenenti a G, precisamente come le:

$$a_{00}X_0^2 + 2a_{01}X_0X_1 + a_{11}X_1^2\ ;\ a_{00}X_0Y_0 + a_{01}X_0Y_1 + a_{10}X_1Y_0 + a_{11}X_1Y_1\,,$$

e poichè queste si possono scrivere simbolicamente così:

$$(\mu_0X_0 + \mu_1X_1)^2 = \mu_x^2\ ;\ (\mu_0X_0 + \mu_1X_1)(\mu_0Y_0 + \mu_1Y_1) = \mu_x\mu_y\,,$$

le (7) potranno scriversi:

$$\begin{aligned} (\mu_0X_0 + \mu_1X_1)\Lambda(\mu_0X_0 + \mu_1X_1) &= (\mu_0X_0 + \mu_1X_1)^{(2)} = \mu_x^{(2)} \\ (\mu_0X_0 + \mu_1X_1)\Lambda(\mu_0Y_0 + \mu_1Y_1) &= \mu_x\Lambda\mu_y. \end{aligned}$$

Le X si trasformano contragredientemente alle x, dunque le μ si trasformano cogredientemente alle x.

Da ciò che precede si ricava subito:

TEOREMA II. — *Se si hanno più covarianti speciali e fondamentali di* *o più forme* $\alpha^n_x \equiv \beta^n_x \dots ; \alpha'^n_x \equiv \beta'^n_x ; \dots$

$$(\alpha X), (\alpha Y), \dots (\beta X), \dots (\alpha' X), \dots (XY) \dots$$

à ancora un covariante speciale:

$$(\alpha X)^{n_1} \dots (\alpha Y)^{n_2} \dots (\beta X)^{n_3} \dots (\alpha' X)^{(n_4)} \dots (XY)^{(n_5)}.$$

In particolare: Se i fattori sono covarianti fondamentali, si otterrà ora un covariante fondamentale.

Se chiamiamo « fattore primitivo » un prodotto del tipo:

$$(\alpha X) \mathrm{A} (\beta X) \mathrm{A} \dots \mathrm{A} (\alpha Y) \mathrm{A} \dots \mathrm{A} (XY) \mathrm{A} \dots$$

leducono i teoremi:

TEOREMA III. — *Se un fattore primitivo contiene più di n fattori lineari bolici, relativi ad una serie di variabili, ed n è il grado di A, tale fattore primitivo è nullo.*

TEOREMA IV. — *Per le forme ad una serie di variabili, un fattore pri- tivo è nullo, se vi sono fattori lineari simbolici, appartenenti a diverse ie; come X, Y.*

TEOREMA V. — *Se un fattore primitivo contiene n fattori lineari sim- ci, relativi ad una serie di variabili, tale fattore primitivo è indipen- nte dalla serie di variabili in quistione.*

Applicazioni al caso d'una forma binaria di 1.°, di 2.° e di 3.° grado, e alle forme gruppali di 1.° e di 2.° grado.

1. Le formazioni invariantive d'una forma lineare

$$f = a_0 x_0 + a_1 x_1 \equiv \alpha_x \equiv \beta_x,$$

petto alla forma gruppale lineare $A = m_0 x_0 + m_1 x_1$, sono:

$$f, A, F = (\alpha X) = a_0 m_1 - a_1 m_0.$$

2. Le formazioni invariantive della stessa forma lineare, rispetto alla rma gruppale ortogonale $x_0^2 + x_1^2$, sono:

La forma stessa, che è un covariante non speciale; il covariante fon- mentale $A(x) = x_0^2 + x_1^2$; il covariante speciale $F = (\alpha X) = 2(a_0 x_1 - a_1 x_0)$; nvariante speciale $D = (\alpha X) \mathrm{A} (\beta X) = 2(a_0^2 + a_1^2)$.

3. Forma lineare e forma gruppale $A = x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2$. Le forma- ni invariantive sono:

$$f, A, F = (a_0 - 2a_1) x_0 - (a_1 - 2a_0) x_1, \quad D = 2(a_0^2 + a_1^2 - a_0 a_1).$$

4. Forma lineare e forma gruppale $A = m_0 x_0^2 + 2n\, x_0 x_1 + p\, x_1^2$. forme invariantive sono:

$$f, A\,;\, F = 2\left\{ (a_0 n - a_1 m)\, x_0 - (a_1 n - a_0 p)\, x_1 \right\},$$
$$D = 2\,(p\, a_0^2 - 2n\, a_0 a_1 + m\, a_1^2).$$

5. Forma quadratica e forma gruppale lineare.

Si sa che, rispetto al gruppo proiettivo generale, le forme invari-tive della forma binaria quadratica

$$f = (\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^2 \equiv \alpha_x^2 \equiv \beta_x^2 = a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$$

sono il covariante α_x^2, che è la forma stessa e l'invariante $\Delta = (\alpha\beta)^2$ $a_1^2 - a_2 a_0$, che è il discriminante di f.

Per la forma gruppale $A = m_0 x_0 + m_1 x_1$ alle forme invariantive f e bisogna aggiungere il covariante fondamentale A e l'invariante specia $\varphi = (\alpha X)^2 = a_0 m_1^2 - 2a_1 m_0 m_1 + a_2 m_0^2$.

Nel caso particolare di $A = x_0 + x_1$, le forme invariantive sono:

$$f \;,\; a_1^2 - a_0 a_2 \;,\; x_0 + x_1 \;,\; a_0 - 2a_1 + a_2 .$$

Se $A = x_0$, le forme invariantive diventano:

$$f \;,\; a_1^2 - a_0 a_2 \;,\; x_0 \;,\; a_2 .$$

6. Forma quadratica e forma gruppale di 2.° grado $A = x_0^2 + x_1^2$. Alle formazioni f e Δ bisogna aggiungere:

$$X^2 = 2A \;\;;\;\; (\alpha X)^2 \;\;;\;\; (\alpha X)^{(2)} \;\;;\;\; \left\{ (\alpha X)(\beta X) \right\}^2 \;\;;\;\; [(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X)]^2 .$$

Facendo i calcoli si ha:

$\varphi(x) = (\alpha X)^2 = 4\,(a_0 x_1^2 - 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_0^2)$; $I = (\alpha X)^{(2)} = 2\,(a_0 + a_1)$; $\left\{(\alpha X)(\beta X)\right\}^2 = \varphi^2$, $H = [(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X))^2 = 4\,(a_0^2 + 2a_1^2 + a_2^2)$ e tra gli invarianti I , H e Δ sussiste la relazione:

$$H = I^2 + 8\Delta$$

7. Se la forma gruppale di 2.° grado è $A = x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2$, le forme invariantive sono:

α_x^2 , $\Delta = a_1^2 - a_0 a_2$, $A = x_0^2 + x_0 x_1 + x_1^2$, $\varphi(x) = (a_0 - 4a_1 + 4a_2) + (4a_0 - - 4a_1 + a_2)\, x_1^2 - 2\,(5a_1 - 2a_2 - 2a_0)\, x_0 x_1$, $H = 2(2a_0^2 + 5a_1^2 + 2a_2^2 - 4a_0 a_1 + + a_0 a_2 - 4a_1 a_2)$, $I = 2\,(a_0 - a_1 + a_2)$. Anche quì H è esprimibile razionalmente mediante I e Δ, della relazione: $H = I^2 + 6\Delta$.

8. Se la forma gruppale è $A = mx_0^2 + 2nx_0x_1 + px_1^2$, le forme inva-
ntive sono:

Δ , A , $\varphi_x^2 = 4[(a_0n_2 - 2a_1mn + a_2m^2)x_0^2 + 2(a_0np - a_1mp - a_1n^2 + a_2mn)x_0x_1 + (a_0p^2 - 2a_1np + a_2n^2)x_1^2]$, $II = 4[p^2a_0^2 + (2n^2 + 2mp)a_1^2 + a_2^2 - 4npa_0a_1 + 2n^2a_0a_2 - mna_1a_2]$ e $I = 2(a_0p - 2a_1n + a_2m)$. Anche
ı è:

$$II = I^2 + 8(mp - n^2)\Delta .$$

9. Forme invariantive d'una cubica binaria α_x^3, rispetto alla forma
uppale di 1.° grado $A = xx_1$

Rispetto al gruppo proiettivo, le forme invariantive della cubica sono:

$$f = (\alpha_0a_0 + \alpha_1x_1)^3 \equiv \alpha_x^3 \equiv \beta_x^3 \equiv \gamma_x^3 = a_0x_0 + 3a_1x_0^2x_1 + 3a_2x_0x_1^2 + a_3x_1^3$$

no:

$= \alpha_x^3$, $\Delta_x^2 = (\alpha, \beta)^2 = 2(a_0a_2 - a_1^2)x_0^2 + 2a_0a_3x_0x_1 + 2(a_1a_3 - a_2^2)x_1^2$,
$^3 = (f, \Delta) = (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)x_0^2 + 3(a_0a_1a_3 + a_1^2a_2 - 2a_2^2a_0)x_0^2x_1 - 3(a_0a_2a_3 + a_1a_2^2 - 2a_1^2a_3)x_0x_1^2 - (a_0a_2^3 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2x_1^3)$, $R = (f, Q)^3 = 2(6a_0a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 - a_0^2a_3^2 + 3a_1^2a_2^2)$.

Rispetto alla forma gruppale $A = x_0 + x_1$ si hanno ancora le forme
variantive:

$= x_0 + x_1$, $P_x^2 = (X\beta)^2\beta_xX_x = [(a_2 + a_0 - 2a_1)x_0 + (a_3 + a_1 - 2a_2)x_1]$.
$_0 + x_1)$, $F = (\alpha X)^3 = a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3$, $G_x^3 = (X\beta)^2(\gamma\beta)X_x^2\gamma_x^2 = [(a_0a_3 - 2a_2a_0 - a_2a_1 + 2a_1^2)x_0^2 + 2(a_3a_1 - a_0a_2 + a_1^2 - a_2^2)x_0x_1 - (a_0a_3 - 2a_1a_3 - a_1 + 2a_2^2)x_1^2](x_0 + x_1)$, $L_x^5 = (\alpha X)^2(\gamma X)\alpha_x\gamma_x^2X_x^2 = [(a_0^2 + a_2a_0 - 3a_0a_1 - a_1a_2 + 2a_1^2)x_0^3 + (3a_0a_1 + 8a_1a_2 - 5a_1^2 - 4a_0a_2 - 2a_2^2 + a_0a_3 - a_1a_3)x_0^2x_1 - (3a_3a_2 - 8a_1a_2 - 5a_2^2 - 4a_3a_1 - 2a_1^2 + a_0a_3 - a_2a_0)x_0x_1^2 - (a_3^2 + a_1a_3 - 3a_3a_2 - a_2a_1 + 2a_2^2)x_1^3](x_0 + x_1)^2$, $M_x^3 = (\alpha\beta)^2(X\beta)\alpha_xX_x^2 = [(a_0a_3 - a_1a_2 - 2a_0a_2 + 2a_1^2)x_0 - (a_0a_3 - a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_2^2)x_1](x_0 + x_1)^2$, $S = (X\beta)^2$.
3) $(\delta X)(\delta\gamma)^2 = 3a_1a_2a_3 + 3a_2a_1a_0 - a_3^2a_0 - a_0^2a_3 - 2a_2^3 - 2a_1^3 + 3a_0a_2a_3 + 3a_3a_1a_0 - 6a_1^2a_3 - 6a_2^2a_0 + 3a_1a_2^2 + 3a_2a_1^2$.

L'invariante $E = [(\alpha X)\Lambda(\beta X)]^3$ per il III teorema è nullo.

10. Forme invariantive della cubica binaria α_x^3, rispetto al gruppo
rtogonale $A = x_0^2 + x_1^2$.

Alle solite forme invariantive α_x^3, Δ_x^2, Q_x^3 ed R, bisogna aggiungere:

$= x_0^2 + x_1^2$; $P_x^5 = (\alpha_1X)^2 = 4[a_2x_0^3 + (a_3 - 2a_1)x_0^2x_1 + (a_0 - 2a_2)x_0x_1^2 + - a_1x_1^3](x_0^2 + x_1^2)$; $(\alpha X)^{(3)} = 0$; $E = [(\alpha X)\Lambda(\beta X)]^3 = 8(a_0^2 + 3a_1^2 + 3a_2^2 + {}_3^2)$, $F_x^3 = (\alpha X)^3 = -8(a_3x_0^3 - 3a_1x_0^2x_1 + 3a_2x_0x_1^2 - a_0x_1^3)$, $[(\alpha X)(\beta X)]^3 = (F_x^3)^2$.

Da Q_x^3 si avranno le forme invariantive:

$G_x^6 = (X\beta)^2(\gamma\beta) X_x\gamma_x^2 = 4[(a_0a_3 - a_1a_2)x_0^4 - 2(a_0a_2 - a_1a_3 - a_1^2 + a_2^2)x_0^3x_1 + 2(a_1a_3 - a_0a_2 - a_2^2 + a_1^2)x_0x_1^2 - (a_0a_3 - a_1a_2)x_1^4](x_0^2 + x_1^2)$, $L_x^6 = (\alpha X)^2(\gamma X)\alpha_x\gamma_x^2 = -8[a_1a_2x_0^6 + (2a_2^2 - 2a_1^2 - a_0a_2 - a_1a_3)x_0^5x_1 + (3a_0a_1 - a_0a_3 - 8a_1a_2 + 3a_2a_3)x_0^4x_1^2 + (4a_0a_2 - 4a_1a_3 - a_0^2 + 5a_1^2 - 5a_2^2 + a_3^2)x_0^3x_1^3 - (3a_2a_3 - a_0a_3 - 8a_1a_2 + 3a_2a_3)x_0^4x_1^2 + (4a_0a_2 - 4a_1a_3 - a_0^2 + 5a_1^2 - 5a_2^2 + a_3^2)x_0^3x_1^3 - (3a_2a_3 - a_0a_2 - 8a_1a_2 + 3a_0a_1)x_0^2x_1^4 - (2a_1^2 - 2a_2^2 - a_3a_1 + a_0a_2)x_0x_1^5 - a_1a_2x_1^6]$, $M_x^6 = (\alpha\beta)^2(X\beta)\alpha X_x^2 = 2[(a_0a_3 - a_1a_2)x_0^2 + 2(a_1a_3 - a_0a_2 + a_1^2 - a_2^2)x_0x_1 - (a_0a_3 - a_1a_2)x_1^2](x_0^2 + x_1^2)^2$, $(X\beta)^2(X\beta) = (X\beta^3) = F_x^3$, già calcolato.

Cambiando in Q_x^3, α, β in X, ovvero β e γ in X, nelle forme invariantive comparirà un invariante nullo, e perciò tali forme saranno nulle.

Dall'invariante R si avrà:

$S_x^3 = (X\beta)^2(\gamma\beta)(\delta X)(\delta\gamma)^2 \equiv 8[(3a_1a_2a_3 - a_3^2a_0 - 2a_2^3)x_0^3 + 3(a_0a_2a_3 - 2a_1^2a_3 + a_1a_2^2)x_0^2x_1 + 3(a_0a_1a_3 - 2a_0a_2^2 + a_1^2a_2)x_0x_1^2 + (3a_0a_1a_2 - 2a_1^3 - a_0^2a_3)x_1^3]$.

Cambiando in R, successivamente β, γ, δ in X, si avranno tre covarianti tutti eguali ad S.

Cambiando in R, α e β in X, oppure α e δ in X, oppure β e γ in X, o γ e δ in X, nelle forme che si ottengono compare sempre un determinante nullo e perciò tali forme sono nulle.

Cambiando in R, α e γ in X, si ha il covariante speciale $(X\beta)^3(\delta X)^3 = -(F_x^3)^2$.

Cambiando in R, β e δ in X, si ha, come sopra $(-F_x^3)^2$.

Si noti che tra le forme invariantive trovate sussistono ancora le relazioni:

$$Q_x^3(x_0 = -x_1 \quad , \quad x_1 = x_0) = 8\, S_x^3(x_0 \quad , \quad x_1)$$
$$S_x^3(x_0 = -x_1 \quad , \quad x_1 = x_0) = 8\, F_x^3(x_0 \quad , \quad x_1)$$

SULLA DEFINIZIONE DI FUNZIONI EGUALMENTE SINGOLARI DEL PINCHERLE

Nota del dott. **Guido Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — In questa Nota l'A. esamina il concetto di funzioni egualmente sin-
ari, dato dal PINCHERLE, proponendo talune estensioni.

1. Due serie di potenze:

$$f(x) = \Sigma a_h x^h \quad , \quad \varphi(x) = \Sigma b_h x^h$$

enti lo stesso raggio di convergenza ρ, sono dette, dal PINCHERLE, egual-
nte singolari se esiste una costante k tale che la serie: $f(x) - k\varphi(x)$,
bia raggio di convergenza $\rho_1 > \rho$. Si può dire, equivalentemente: le due
ie $f(x)$ e $\varphi(x)$ sono egualmente singolari — e noteremo ciò, simbolica-
nte, con: $\hookrightarrow$ – se una loro combinazione lineare a coefficienti costanti à
ggio di convergenza maggiore di quelli delle due serie [tale definizione
plica, necessariamente, che i due raggi di queste sieno eguali].

2. Sia, ora: $f \hookrightarrow \varphi$. Segue che f e φ, nella corona determinata dalle
conferenze di raggi ρ e ρ_1 — l'ultima esclusa — che indicheremo con
$\rho_1]$, combinate linearmente mediante costanti, non devono dar luogo a
ngolarità.

È d'altra parte evidente che due funzioni aventi un polo semplice sul
l cerchio sono egualmente singolari se ànno la singolarità nello stesso
nto. Così, per esempio, non si può pretendere che una combinazione li-
are a coefficienti costanti liberi dal cerchio unitario le due serie $A/(x-1)$,
$B/(x+1)$.

Si vede ancora che due funzioni aventi l'una una singolarità essenziale,
altra, per esempio, polare, non potranno mai essere egualmente singolari,
così via.

3. Beninteso, la prima condizione da richiedere per due serie che deb-
no essere egualmente singolari è che *alcun punto* del cerchio comune di
nvergenza appartenga, per una sola delle due funzioni, ad un insieme
rfetto di punti singolari non appartenenti al cerchio stesso.

Perchè possa intervenire l'eguale singolarità tra le due funzioni oc-
rre che il predetto insieme sia di singolarità per le due funzioni, con-
mporaneamente. Al più, nella prima ipotesi, un punto del cerchio può
sere punto limite di un insieme isolato di punti singolari non situati,
esti ultimi sul cerchio.

È chiaro, dunque, che la prima ipotesi esclude la possibilità alle due serie di essere egualmente singolari, almeno secondo la definizione Pincherle.

È naturale, quindi, per tutto quanto si è detto, pensare ad altre estensioni della definizione di funzioni egualmente singolari.

4. Una prima immediata definizione da porre per due serie egualmente singolari, liberandosi dal vincolo dell'elemento analitico (ossia dai cerchi di convergenza relativi ad un centro) è nel richiedere, per la loro differenza, di non essere più singolare in P, essendo questo, punto di singolarità per entrambe, pur potendosi presentare e residuare altre singolarità per ciascuna delle due funzioni e per la loro combinazione, in altri punti

5. Una successiva estensione di questa definizione si à nel ritenere egualmente singolari le due serie, per rispetto ad un gruppo $[G]$ di punti singolari per entrambe.

E, più generalmente, dato che la moltiplicazione per una costante non altera la natura delle singolarità, potremo definire due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$ *egualmente singolari in un area* A, nella quale siano o no punti di singolarità delle due funzioni, se una combinazione lineare a coefficienti costanti delle due funzioni è priva di singolarità in A. S' intende bene, qui, che se una delle due funzioni è regolare in A, anche l'altra dev'esserlo. Veniamo così, ad estendere, il concetto di *caratteristica*, intendendo per caratteristica F_E di una funzione $f(x)$ su area contenente un insieme perfetto E di punti singolari, quella funzione che regolarizza in A, su E, la $f(x)$; tale, cioè, che

$$f(x) - \frac{b}{a} F_E$$

non abbia più singolarità su E.

Ne segue che una qualunque funzione $f(x)$ si potrà decomporre in una infinità numerabile di funzioni caratteristiche: $f\left(\frac{1}{x-a_c}\right)$, relative ai punti isolati dell'insieme di singolarità e nella funzione caratteristica F_E relativa all'insieme perfetto E.

La definizione generale da noi data, si può specializzare in un'altra. Basta a tal'uopo, riferirsi alla corona circolare $[\rho, \rho_1]$: si avrà, allora, il concetto di funzioni egualmente singolari nella corona $[\rho, \rho_1]$.

6. La definizione Pincherle, com'è chiaro, è un caso particolare di quella da noi poc'anzi data, mentre include quest' ultima, ora data.

In effetti due funzioni sono egualmente singolari secondo Pincherle, quando esiste *almeno* una corona $[\rho, \rho_1]$ con $\rho_1 \neq \rho$ entro la quale le funzioni sono eguaalmente singolari secondo la nostra definizione, e quindi, in tutte le corone in quella incluse.

In altri termini, per la definizione Pincherle, due funzioni sono egual-

ıte singolari se ànno le stesse singolarità in una delle predette corone. segue ch' esse funzioni, differiscono nella caratteristica dianzi definita, .tiva a quella corona, per quelle funzioni olomorfe nell' interno del cer-) di raggio maggiore.

La definizione PINCHERLE, quindi, in contrapposto alla nostra, non tiene to dello spessore della corona: basta che questa esista (di spessore co- ıque piccolo).

7. Diremo che una funzione è *funzione tipo* in una corona $[\rho, \rho_1]$, se questa, e soltanto in questa, essa presenta singolarità.

Segue che, la definizione PINCHERLE, permette di sostituire alla nozione caratteristica di una funzione in un punto, quella di « funzione tipo » senso che entrambe regolarizzano la funzione: la prima in un punto, seconda in una corona (rispetto al centro di questa) per la quale la fun- ıe tipo è definita.

Si vede, dunque, che la definizione PINCHERLE è, in certo senso, rac- usa tra le due da noi date.

Ed in effetti, per la prima nostra definizione, si confrontano singolarità due funzioni presenti localmente [e ciò indipendentemente dall' elemento .litico originario, con centro nell' origine]. Due funzioni soddisfacenti alla ma definizione, combinate opportunamente, in modo lineare, con coeffi- ıti costanti, danno una funzione priva di singolarità in quella certa re- ne: dunque, tale definizione, convenientemente intesa, viene ad includere endendolo, il concetto contenuto nella definizione PINCHERLE. La nostra onda definizione relativa ad una corona circolare è poi contenuta in ılla PINCHERLE, perchè, mentre la nostra si riferisce ad uno spessore δ fissato, della corona, quella PINCHERLE, vale sempre che per essa esiste *neno* un δ.

8. Ai fini del problema che ci occupa, possiamo ritenere, in certo ıso esteso, le singolarità polari di una funzione come « irrilevanti » e ndi « trascurarle » riducendoci, così, ad esaminare il campo delle fun- ni solo rispetto a singolarità essenziali. Basta por mente al fatto che moltiplicazione per un opportuno polinomio riesce a regolarizzare la zione stessa in quei punti polari — sempre che siano in numero finito, ueno — facendo passare ad altra funzione non avente, più, quei poli.

Si è, così, ridotti a dare la seguente definizione:

Diremo due serie $f(x)$ e $\varphi(x)$ egualmente singolari di « seconda specie » sono tali secondo una qualunque delle definizioni da noi proposte, a ıno di un numero finito di singolarità polari.

Ciò implica l'esistenza di due polinomi $A(x)$ e $B(x)$, tali che:

$$A(x) \cdot f(x) + B(x) \cdot \varphi(x)$$

n abbia singolarità nella regione o nei punti considerati.

La moltiplicazione per A e B à l'effetto di far sparire i poli; la combinazione lineare, invece, di ridurre le altre singolarità. Volendo, ora, estendere direttamente questa definizione in analogia a quella di PINCHERLE, per poter dire che $f(x)$ è egualmente singolare di « seconda specie » a $\varphi(x)$ essendo f e φ due elementi relativi all'origine — e noteremo, ciò simbolicamente con $f(x) \leftrightarrows \varphi(x)$ — occorre che esistano due polinomi A e B tali che Af e $B\varphi$ abbiano lo stesso raggio di convergenza ρ, mentre $Af + B\varphi$ abbia raggio $\rho_1 > \rho$.

Così, ad esempio, sono egualmente singolari di « seconda specie » le due funzioni

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + e^x \quad , \quad \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} + e^x$$

che non sono, invece, egualmente singolari secondo la definizione PINCHERLE.

9). È facile far vedere che il nuovo concetto di « eguaglianza » sodisfa alle tre note leggi.

a) Dico che se è

$$\varphi(x) \leftrightarrows \psi(x) \quad , \quad \psi(x) \leftrightarrows q(x)$$

sarà ancora

$$\varphi(x) \leftrightarrows q(x)$$

Infatti, poichè, $\varphi(x) \leftrightarrows \psi(x)$, vuol dire che, per due polinomi R_1 e R_2 risulta che $R_1\varphi - R_2\psi$, à raggio $\rho_1 > \rho$.

Analogamente, con evidenza di simboli:

$$R_3\psi - R_4 q$$

à raggio $\rho_2 > \rho$.

La somma delle due serie:

$$R_1R_3\varphi - R_2R_3\psi \quad , \quad R_2R_3\psi - R_2R_4q$$

à raggio di convergenza almeno eguale al più piccolo dei due ρ_1 e ρ_2.

b) Naturalmente una qualunque funzione è egualmente singolare di « seconda specie » a sè stessa, come si vede subito per $R_1 = R_2$.

c) Se:

$$f(x) \leftrightarrows \varphi(x) \text{ sarà anche: } \varphi(x) \leftrightarrows f(x)$$

Infatti, per ipotesi, esistono due polinomi R_1 e R_2 tali che $R_1 f - R_2\varphi$,

ia raggio $\rho_1 > \rho$. Ebbene, lo stesso raggio à $R_2\varphi - R_1 f$, in quanto esso erisce dalla prima espressione, per la costante moltiplicativa: -1.

10) Una più ampia estensione della definizione PINCHERLE è consen- ove si faccia ricorso alla nozione di *composizione* di due serie, se- do HADAMARD.

Com'è immediato, l'operatore $x\dfrac{d}{dx}$, applicato ad un elemento $f(x)$ di tro l'origine, equivale alla composizione di $f(x)$ con $\sum_1^\infty n x^n$.

Cosicchè, la composizione ridurrà, di sicuro, ad esempio, la singolarità aritmica in un punto in altra polare nello stesso punto. Questa, poi, come ılta dalla definizione da noi data, può entro un certo senso già preci-), essere trascurata, nel confronto delle singolarità di due funzioni.

Premesso tale esempio, consideriamo una certa funzione fissa θ, e nponiamo, con essa le funzioni f e φ da esaminare: le singolarità di f si muteranno in generale, in altre collocate altrove.

Per evitare, però, che le singolarità di f e φ, mutino di posto, inten- emo per $\theta(x)$ una funzione avente una unica singolarità al finito nel ıto *uno*.

Diremo, quindi, due funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, congruentemente singolari ondo il modulo $\theta(x)$, se $f\Lambda\theta$ [indichiamo con tale simbolo l'operazione composizione secondo HADAMARD, delle due serie f e θ] e $\varphi\Lambda\theta$ ànno lo sso raggio di convergenza ρ, mentre

$$A\,.\,(f\Lambda\theta) + B(\varphi\Lambda\theta)$$

aggio $\rho_1 > \rho$.

Anche per tale nuova definizione si può far vedere che se

$$f \overset{\backsim}{\underset{\backsim}{=}} \varphi \quad , \qquad (\text{mod. } \theta)$$

n evidente significato nel nuovo simbolo $\overset{\backsim}{\underset{\backsim}{=}}$)

$$\varphi \overset{\backsim}{\underset{\backsim}{=}} \psi \quad , \qquad (\text{mod. } \theta)$$

che:

$$f \overset{\backsim}{\underset{\backsim}{=}} \psi \quad , \qquad (\text{mod. } \theta)$$

Infatti: detto ρ il raggio di $f\Lambda\theta$ e $\varphi\Lambda\theta$, il raggio di $[A\,.\,f + B\varphi]\Lambda\theta$ è $> \rho$. Così $(C\varphi + D\psi]\Lambda\theta$ à raggio $\rho_2 > \rho$.

Segue che:

$$[C(Af + B\varphi) - B(C\varphi + D\psi)]\,\Lambda\theta$$

rà raggio maggiore di ρ.

Risulta da quanto precede, che una volta studiato un tipo di singolarità per le f e φ che conduce, mediante la composizione con θ, a singolarità polari si può, attraverso il procedimento tenuto nello studio delle singolarità delle funzioni, prescindere da tale tipo di singolarità.

Osserviamo, a tal riguardo, che la composizione, per es., con la serie $\Sigma n^2 x^n$, equivale alla doppia derivazione e che questa riduce a semplici singolarità polari, oltre quelle logaritmiche, anche quelle del tipo: $(x-\alpha).lg(x-\beta)$. Quindi, anche tal tipo di singolarità può essere trascurato nel senso, del resto su esplicitato, che nel confronto dalle singolarità delle due funzioni date, si può prescindere da tal tipo di singolarità. Ovviamente il processo va inteso esteso a tutti i tipi di singolarità che a mano a mano si vanno rintracciando.

10. Si potranno, inoltre, tenere presenti le seguenti considerazioni in merito alla composizione atteso il ruolo che questa à nella definizione da noi introdotta.

a) La funzione $h(x) \equiv f(x) \Lambda \varphi(x)$ è somma di funzioni aventi, ciascuna, le proprie singolarità dipendenti, soltanto, da una singolarità di $f(x)$ e da una di $\varphi(x)$.

b) Posto:

$$f(x) = \Sigma a_n x^{\lambda \cdot n} \quad , \quad \varphi(x) = \Sigma h_n x^{\lambda n}$$

la funzione $h(x) \equiv f(x) \Lambda \varphi(x)$, in corrispondenza ad $\alpha . \beta$ (con α e β punti singolari di f e φ) à λ punti singolari della forma $R_\lambda . \alpha . \beta$, ove R_λ rappresenta una delle radici λ-esime dell'unità.

c) Se $f(x)$ à m poli e $\varphi(x)$, n, la $h(x)$ ne avrà $n . m$.

d) L'ordine di un polo di $h(x)$ è $\mu + \nu - 1$, se μ e ν sono gli ordini di $f(x)$ e $\varphi(x)$. Si vede facilmente ricorrendo all'operatore $x . \frac{d}{dx}$.

e) Funzioni aventi singolarità polari conducono attraverso la composizione, a singolarità polari.

f) Nella composizione le costanti ànno lo stesso ruolo dello zero, nell'ordinaria moltiplicazione. È immediato.

g) Le funzioni aventi solo poli (di primo ordine) ànno il ruolo dell'unità nell'ordinaria moltiplicazione.

Tale proprietà permette di far rientrare nella nostra ultima definizione, quella di Pincherle già da noi generalizzata con la introduzione dei polinomi al posto delle costanti.

Le proprietà relative alla classificazione di alcuni tipi di singolarità per effetto della composizione si stabiliscono agevolmente.

SUCCESSIONI RICORRENTI E POLINOMI DI BERNOULLI E DI EULERO

Nota del prof. **Letterio Toscano**, *presentata dal socio* **R. Marcolongo**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — L'A. continuando ricerche precedenti stabilisce alcune nuove relazioni i polinomi di BERNOULLI e quelli associati di CAUCHY, valendosi di successioni renti e delle loro associate.

1. Il NIELSEN nel suo *Traité élémentaire des nombres de* BERNOULLI is, Gauthier-Villars, 1923), occupandosi dei polinomi di CAUCHY, quale npio di polinomi simmetrici, presenta due notevoli relazioni che legano polinomi a quelli di BERNOULLI e di EULERO: relazioni che in partico- conducono a formule sui numeri di BERNOULLI e di EULERO.

Ma i polinoni di CAUCHY sono elementi di una successione ricorrente are del secondo ordine, e tali successioni e le loro associate godono di nerose proprietà. Sicchè fissando i polinomi associati a quelli di CAUCHY loro legame con quelli di BERNOULLI e di EULERO è possibile stabilire ve relazioni tra questi ultimi traducendo il formulario delle successioni rrenti.

Tale questione vogliamo qui impostare, e risolvere in qualche caso ticolare.

2. Siano

$$U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n, \ldots (U)$$
$$V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots (V)$$

successioni ricorrenti del secondo ordine relative alla stessa equazione atteristica

$$X^2 - pX + q = 0.$$

Abbiamo definito *associate* [1]) tali successioni quando gli elementi ini- li U_0, U_1, V_0, V_1, e i termini p e q della scala di ricorrenza soddisfano condizioni

$$V_0 = 2U_1 - pU_0 \quad , \quad V_1 = pU_1 - 2qU_0$$

e inverse

$$\Delta U_0 = 2V_1 - pV_0 \quad , \quad \Delta U_1 = pV_1 - 2qV_0$$

---

[1]) L. TOSCANO - *Contributo alla formazione del formulario delle successioni ricor- iti associate del secondo ordine.* Anais da Faculdade de ciências do Porto, tomo XX.

con $\Delta = p^2 - 4q$, per cui ponendo $V_0 = 2$, $V_1 = p$, come a noi interessa, risulta per l'*associata* $U_0 = 0$, $U_1 = 1$.

Poniamo inoltre

$$p = x + \frac{1}{2} \quad , \quad q = \frac{1}{2^4}$$

da cui $\Delta = x(x+1)$.

I polinomi $V_n(x)$ così definiti sono quelli di CAUCHY e i corrispondenti $U_n(x)$ li diciamo ad essi *associati*.

Per questi polinomi valgono i seguenti sviluppi [1].

$$(1) \qquad V_n(x) = \sum_{r=0}^{r=[\frac{n}{2}]} (-1)^r \frac{n}{n-r} \binom{n-r}{r} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2r}}{2^{4r}}$$

$$(2) \qquad V_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{r=[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2r} \left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2r} (x^2+x)^r$$

$$(3) \qquad V_{2n}(x) = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} \frac{(x^2+x)^{n-r}}{2^{4r}}$$

$$(4) \qquad V_{2n-1}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n-r-2}{r} \frac{(x^2+x)^{n-r-1}}{2^{4r}}$$

$$(1') \qquad U_n(x) = \sum_{r=0}^{r=[\frac{n-1}{2}]} (-1)^r \binom{n-r-1}{r} \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2r-1}}{2^{4r}}$$

$$(2') \qquad U_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{r=0}^{r=[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2r+1} \left(x+\frac{1}{2}\right)^{n-2r-1} (x^2+x)^r$$

$$(3') \qquad U_{2n}(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right) \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n-r-1}{r} \frac{(x^2+x)^{n-r-1}}{2^{4r}}$$

---

[1]) L. TOSCANO – *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omogenee.* Nota I, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, serie 6.ª, vol. XIX, 1934.

$$U_{2n-1}(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{2n-1}{2n-r-1} \binom{2n-r-1}{r} \frac{(x^2+x)^{n-r-1}}{2^{4r}} .$$

Inoltre è noto che [1])

$$V_{2n}(p, q) = V_n(p^2 - 2q, q^2)$$

uindi dalla (3) segue l' altro sviluppo

$$V_n(x) = \sum_{r=0}^{r=n} \frac{2n}{2n-r} \binom{2n-r}{r} \frac{x^{n-r}}{2^{2r}} .$$

Il corrispondente sviluppo di $U_n(x)$ si ottiene applicando la formula [2])

$$\frac{d\, V_n(p)}{dp} = n U_n(p)$$

i ha pertanto

$$U_n(x) = \sum_{r=0}^{r=n-1} \binom{2n-r-1}{r} \frac{x^{n-r-1}}{2^{2r}} .$$

3. Esaminiamo le (U) e (V) per valori particolari di x.

Se $x = -\frac{1}{4}$ le successioni

$$a_n = 2^{2n} \quad V_n\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$b_n = 2^{2n-2}\, U_n\left(-\frac{1}{4}\right)$$

ultano di equazione caratteristica

$$X^2 - X + 1 = 0 ,$$

umono i valori iniziali

$$a_0 = 2 \ , \ a_1 = 1 \ , \ b_0 = 0 \ , \ b_1 = 1 \ ,$$

gli altri valori di a_n e b_n per $n \geq 2$ sono dati dal seguente prospetto

$$\begin{array}{lll} a_{6m} = 2 \ , \ a_{6m+3} = -2 & b_{3m} = 0 & \\ a_{6m \pm 1} = 1 & b_{6m+1} = 1 & b_{6m+5} = -1 \\ a_{6m \pm 2} = -1 & b_{6m+2} = 1 & b_{6m+4} = -1 . \end{array}$$

---

[1]) *Sulla integrazione delle successioni ricorrenti del secondo ordine, lineari ed omo-*
nee. Nota II, Rend. R. Acc. Naz. Lincei, serie 6.ª, vol. XX, 1934.

[2]) Cfr. *Contributo alla formazione del formulario delle successioni ricorrenti...* (già
ata).

Se $x = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$ le successioni

$$c_n = 2^{2n} \; V_n\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)$$

$$d_n = 2^{2n-2} \, U_n\left(\frac{\sqrt{2}-2}{4}\right)$$

risultano di equazione caratteristica

$$X^2 - \sqrt{2}\, X + 1 = 0,$$

assumono i valori iniziali

$$c_0 = 2 \quad , \quad c_1 = \sqrt{2} \quad , \quad d_0 = 0 \quad , \quad d_1 = 1 \, ,$$

e gli altri valori di c_n e d_n per $n \geqq 2$ sono dati dal seguente prospetto

$$(7) \qquad \begin{array}{ll} c_{8m} = 2 \;,\; c_{8m+4} = -2 & d_{4m} = 0 \\ c_{8m\pm1} = \sqrt{2} & d_{8m+1} = 1 \quad , \quad d_{8m+7} = -1 \\ c_{8m\pm2} = 0 & d_{8m+2} = \sqrt{2} \quad , \quad d_{8m+6} = -\sqrt{2} \\ c_{8m\pm3} = -\sqrt{2} & d_{8m+3} = 1 \quad , \quad d_{8m+5} = -1 \, . \end{array}$$

Analoghe considerazioni valgono per $x = \frac{\sqrt{3}-2}{4}, \ldots$ [1]).

4. A pagina 103 della citata opera del NIELSEN si trovano le formule [2])

$$(8) \quad \frac{1}{2} V_m(x) = K_m + \sum_{s=0}^{s=\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{2m}{2m-2s-1} \binom{2m-2s-1}{2s+1} \frac{(m-2s-1)!}{2^{4s+2}} B_{m-2s}(x)$$

$$(9) \qquad \frac{1}{2} V_m(x) = \sum_{s=0}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{m}{m-s} \binom{2m-2s}{2s} \frac{(m-2s)!}{2^{4s}} E_{m-2s}(x)$$

---

[1]) L. TOSCANO — *Sulla interpolazione nelle successioni ricorrenti del secondo ordine.* Atti R. Ist. Veneto, tomo XCIII, 1934.

[2]) Per quanto riguarda i polinomi e i numeri di BERNOULLI, EULERO, e i coefficienti della tangente, rimandiamo all'opera del NIELSEN.

a

$$K_m = \sum_{s=0}^{s=m} \frac{(-1)^{m+s} m}{(2m-s)(m-s+1) 2^{2s}} \binom{2m-s}{s}$$

$$K_{2n+1} = 0 ,$$

ie esprimono il legame tra i polinomi di CAUCHY e quelli di BERNOULLI Eulero.

E poichè

$$\frac{d V_m(x)}{dx} = m U_m(x)$$

$$\frac{dB_m(x)}{dx} = B_{m-1}(x) \qquad \frac{dE_m(x)}{dx} = E_{m-1}(x)$$

alle precedenti ricaviamo le altre

$$10) \quad \frac{1}{4} U_m(x) = \sum_{s=0}^{s=\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{1}{2m-2s-1} \binom{2m-2s-1}{2s+1} \frac{(m-2s-1)!}{2^{4s+2}} B_{m-2s-1}(x)$$

$$11) \quad \frac{1}{2} U_m(x) = \sum_{s=0}^{s=\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{1}{m-s} \binom{2m-2s}{2s} \frac{(m-2s)!}{2^{4s}} E_{m-2s-1}(x)$$

che legano i polinomi associati di CAUCHY a quelli di BERNOULLI e di Eulero.

Ciò posto, qualunque formula sulle $U_m(x)$ e $V_m(x)$ si può tradurre in altra sulle $B_m(x)$ e $E_m(x)$, ma noi ci limitiamo solo a considerare un caso notevole poichè in generale si ottengono formule non sempre utili nelle ricerche sui numeri di BERNOULLI e di EULERO.

Dapprima, a complemento di quanto si trova nell' opera del NIELSEN ponendo $x = 0$ nella (9) e nella derivata della (8), e $x = -\frac{1}{2}$ nella (9), notiamo che ponendo $x = 0$ nella (11) per $m = 2n$ e $x = -\frac{1}{2}$ nelle (10) e (11) per $m = 2n + 1$, tenendo presente che

$$E_{2n-2s-1}(0) = \frac{(-1)^{n-s-1} T_{n-s}}{(2n-2s-1)!\, 2^{2n-2s}}$$

$$B_0\left(-\frac{1}{2}\right)=1\,,\; B_{2n-2s}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-s}(2^{2n-2s}-2)\,B_{n-s}}{(2n-2s)!\,2^{2n-2s}} \qquad (s\leq n-1)$$

$$E_0\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,,\; E_{2n-2s}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{(-1)^{n-s}\,E_{n-s}}{(2n-2s)!\,2^{2n-2s+1}} \qquad (s\leq n-1)$$

si trovano le formule

$$(12) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(n-s)}{(2n-s)\,2^{2s}}\binom{4n-2s}{2s}T_{n-s}=\frac{(-1)^{n-1}\,n}{2^{2n-1}}$$

$$(13) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(2^{2n-2s}-2)}{(4n-2s+1)\,2^{2s}}\binom{4n-2s+1}{2s+1}B_{n-s}=\frac{2n+1-(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n}}$$

$$(14) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^{n-s}(2n-2s+1)}{(2n-s+1)\,2^{2s}}\binom{4n-2s+2}{2s}E_{n-s}=\frac{(-1)^n-(2n+1)}{2^{2n}}\,.$$

In relazione poi alle successioni ricorrenti la (8) è stata considerata dal NIELSEN per $x=-\frac{1}{4}$ e $m=2n+1$, ed ora esaminiamo la (10) per $x=-\frac{1}{4}$ e $m=2n$ o $m=2n+1$.

Tenendo presente che

$$B_{2n-2s-1}\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{(-1)^{n-s-1}\,E_{n-s-1}}{(2n-2s-2)!\,2^{4n-4s-2}} \qquad (s\leq n-2)$$

$$B_{2n-2s}\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{(-1)^{n-s}(2^{2n-2s}-2)\,B_{n-s}}{(2n-2s)!\,2^{4n-4s}} \qquad (s\leq n-1)$$

e che dalle successioni ricorrenti si ha

$$U_n\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{b_n}{2^{n-2}}\,,$$

seguono le due formule

$$(15) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-2}\frac{(-1)^s(2n-2s-1)}{4n-2s-1}\binom{4n-2s-1}{2s+1}E_{n-s-1}=(-1)^{n-1}\,[b_{2n}-n]$$

$$(16) \qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s(2^{2n-2s}-2)}{4n-2s+1}\binom{4n-2s+1}{2s+1}B_{n-s}=(-1)^n\,\frac{(2n+1)\,b_{2n+1}-1}{2n+1}\,.$$

Queste due ultime formule discendono proprio dalla considerazione i polinomi $U_n(x)$ quali termini di successione ricorrente ed altre se ne trebbero ricavare e ponendo nelle (8), (9), (10), (11), $x = \frac{\sqrt{2}-2}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3}-2}{4}$, . . . , o traducendo formule che legano contemporaneamente le $_1(x)$ $U_n(x)$, ad esempio le seguenti sulle derivate di ordine r

$$\Delta^r \frac{d^{r+1} V_n(p, q)}{dp^{r+1}} = \lambda_{r+1} V_n(p, q) + \mu_{r+1} U_n(p, q) \tag{7}$$

$$\Delta^{r+1} \frac{d^{r+1} U_n(p, q)}{dp^{r+1}} = \lambda'_{r+1} V_n(p, q) + \mu'_{r+1} U_n(p, q), \tag{8}$$

ove i coefficienti λ_r, μ_r, λ'_r, μ'_r sono polinomi in p dei rispettivi gradi -2, $r-1$, $r-1$, r e contenenti soltanto potenze pari o dispari di p.

Precisamente

$$\lambda_1 = 0 \;,\; \lambda_2 = n^2 \;,\; \lambda_3 = -3n^2 p \;, \ldots .$$
$$\mu_1 = n \;,\; \mu_2 = -np \;,\; \mu_3 = (n^3 + 2n)p - 4(n^3 - n)q \;, \ldots .$$
$$\lambda_{r+1} = \Delta \frac{d\lambda_r}{dp} - 2(r-1)p\lambda_r + n\mu_r$$
$$\mu_{r+1} = \Delta \frac{d\mu_r}{dp} + n\Delta\lambda_r - (2r-1)p\mu_r$$

$$\lambda'_1 = n \;,\; \lambda'_2 = -3np \;,\; \lambda'_3 = (n^3 + 6n)p^2 - 4(n^3 - 3n)q \;, \ldots .$$
$$\mu'_1 = -p \;,\; \mu'_2 = (n^2 - 3)p^2 - 4n^2 q \;,\; \mu'_3 = (-8n^2 + 9)p^3 + 8(4n^2 + 3)pq \;, \ldots .$$
$$\lambda'_{r+1} = \Delta \frac{d\lambda'_r}{dp} - 2rp\lambda'_r + n\mu'_r$$
$$\mu'_{r+1} = \Delta \frac{d\mu'_r}{dp} + n\Delta\lambda'_r - (2r+1)p\mu'_r \,.$$

Coppie di stelle per lo studio dei micrometri

Nota del socio corrispondente **Luigi Carnera**

(Adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV)

Sunto. — La necessità di avere un mezzo atto a determinare il valore del passo del micrometro, in modo unico ed uniforme in tutte le stazioni internazionali di latitudine, ha portato alla ricerca di opportune coppie di stelle. Vengono indicati i criterii e le ragioni della scelta, e le posizioni stellari per il 1940.

È noto, che allo scopo di ottenere risultati quanto più possibile omogenei ed uniformi, si è adottato nelle Stazioni internazionali per lo studio delle variazioni di latitudine non solo programmi di osservazione identici e strumenti fra loro gemelli, ma che si sono pure suggeriti metodi uniformi per lo studio e la determinazione delle costanti strumentali. Questa uniformità ha dovuto però subire un relativo allentamento, quando alle stazioni dell'emisfero boreale si sono andate aggiungendo via via prima quelle dell'emisfero australe, e poi quella equatoriale di Batavia. A risentire maggiormente di questa diminuita uniformità fu però un elemento: quello del valore angolare del passo del micrometro. Tale valore, essenziale in questo genere di ricerche, è stato sempre argomento di lunghe e particolari ricerche da parte dei singoli osservatori, ed ha pur dato origine a calcoli laboriosi da parte degli Uffici Centrali di Potsdam e Mizusawa, ove sono stati utilizzati a questo scopo anche gli stessi risultati delle osservazioni di latitudine, onde rettificare i valori dedotti direttamente nelle singole stazioni, consistenti normalmente nell'osservazione di stelle circumpolari negli istanti delle massime digressioni. Ma se queste osservazioni ben si prestano alla deduzione degli errori progressivi della vite, hanno invece l'inconveniente di far risentire sul valore cercato del passo d'influenza della imperfetta conoscenza della declinazione della stella (l'errore che ne deriva è infatti proporzionale a $\sin\delta \, . \, d\delta$, ed essendo δ in questi casi prossimo a 90^0, e quindi $\sin\delta$ prossimo ad 1, l'errore della declinazione si ripercuote nella stessa ragione sul valore incognito del passo). Fatta eccezione della Stazione nostra di Carloforte, poca attenzione meritarono invece i suggerimenti dati dal Prof. Albrecht fin dal 1899, che nella sua « *Anleitung zum Gebrauche des Zenitteleskops auf den Intern. Breitenstationen* » a pag. 7 consigliava la misura col micrometro delle differenze di declinazione di coppie di stelle, di posizione ben nota, al loro passaggio in meridiano. La breve durata della osservazione, e la facilità di applicare il metodo su di

numero alto di stelle poteva far sperare una compensazione fra gli
ori residui nelle declinazioni, e conseguentemente dare per il passo una
ntità molto prossima al vero. A Carloforte invece per opera prima del
CATO e BIANCHI, poi di VOLTA, e SILVA e dello scrivente, e di quanti si
cedettero in quella stazione, senza interrompere le sistematiche os-
vazioni di stelle circumpolari negli istanti delle massime digressioni,
nero pur misurate le differenze di declinazione di particolari coppie
llari scelte fra quelle proposte dal BATTERMANN (A. N. 3513), e di altre
lte opportunamente da me. Servendosi di esse ho potuto dedurre per
valore del passo del telescopio zenitale di Carloforte un valore, che
ferisce di solo —0".0008 da quello trovato e concluso dal WANACH tenendo
ito delle molte migliaia di osservazioni fatte nel periodo che va dal 1906
1911. Per il modo inoltre come potevano esser fatte le osservazioni,
aveva il modo di ritrarre nel tempo stesso le variazioni del valore
l passo sia per effetto delle variazioni di temperatura quanto col tra-
orrere del tempo. Tale metodo facile e sicuro, adottato da noi oltre 30
ni or sono, trovò poco seguito presso le altre stazioni, e solo recentemente
nne caldamente raccomandato dal prof. KIMURA, che propose servirsi a
e scopo di una lista di 92 coppie di stelle compilata dal prof. SCKEPERS,
ettore della Stazione di Batavia. Potendo poi tali coppie essere osservate
temporaneamente da tutte le stazioni di ambedue gli emisferi, si avrebbe
cora il notevole vantaggio di ottenere valori uniformi per tutti gli
umenti. Secondo la proposta del prof. KIMURA durante tutto il corso del-
anno andrebbero aggiunte alle normali osservazioni di latitudine quelle
determinate coppie di stelle per la determinazione del passo, in guisa
e nei primi 15 giorni del mese si dedicherebbero le due ore precedenti
sservazione normale a tale ricerca, mentre sarebbero riservate ad analogo
opo le due ore seguenti nella seconda quindicina; e ciclicamente appa-
rebbero dopo due mesi quali stelle da osservare alla sera quelle che dianzi
ano state osservate nelle ore del primo mattino. È facile comprendere il
tevole vantaggio che arrecherebbe l'adozione di simile metodo, se non
avesse a temere, che il notevole sopracarico di lavoro imposto agli osser-
tori, avesse alla fine a riuscire di danno alla bontà stessa delle osserva-
oni, e che la notevole distanza zenitale, a cui vengono a trovarsi le stelle
oposte per le stazioni boreali, non avesse a dar luogo a risultati erronei
er sensibili anomalie locali di refrazione. Le stelle comprese nell'elenco
ello SCKEPERS sono infatti in maggioranza di declinazione australe (com-
rese fra 0° e —5° : 52 su 92), e delle boreali non vi sono che sole 10 coppie
declinazione superiore a + 3°, onde ne viene, che le stazioni boreali
ovrebbero osservare la più gran parte delle stelle ad una distanza ze-
itale di oltre 40°, mentre le australi le vedono 10° circa più prossime allo
enit. Di più, forse onde aumentare il numero delle coppie, ed ottenere così
na più probabile compensazione negli errori residui delle declinazioni,

nella lista dello SCKEPERS appaiono molte coppie di stelle, che culminano supergiù contemporaneamente, onde, non essendo fissato quale di esse debba essere osservata di preferenza, sorge il pericolo di veder sfuggire quell'uniformità delle osservazioni, alla quale particolarmente si tende. Infine va ancor rilevata la enorme differenza di numero di coppie, che presentano i diversi gruppi proposti per i diversi mesi; chè di fronte al gruppo VIII, da osservare in marzo e giugno, costituito da due uniche coppie, vi è il I che ne comprende ben 13.

Ho pensato pertanto, all'opportunità di tornare da un lato al nostro vecchio criterio limitando queste osservazioni a solo quattro mesi dell'anno in corrispondenza degli estremi stagionali di inverno, estate, primavera ed autunno, e dall'altro di costituire i gruppi con coppie prescelte con criteri più adeguati allo scopo. Ritenni che i quattro gruppi dovessero constatare oltre che di quattro coppie comuni per tutte le stazioni dei tre paralleli ancora di altre quattro (o cinque) diverse per ciascun gruppo di stazioni, ma scelte in guisa che le stelle risultino in immediata prossimità dello zenit locale onde evitare, che nei valori tratti da esse abbiano ad influire eventuali anomalie di rifrazione. Le coppie comuni invece, poste in prossimità dello zenit del parallelo medio fra le stazioni nord e sud, mentre con le differenze sistematiche dei loro risultati renderanno palesi le eventuali anomalie di rifrazione, ci daranno il modo di ricavare quella uniformità di risultati alla quale appunto si tende. Le variazioni poi dei risultati ottenuti dagli stessi gruppi di stelle con le osservazioni invernali e primaverili, ovvero primaverili ed estive, estive ed autunnali, o infine autunnali ed invernali ci daranno i coefficienti termici, così come si ottennero con grande sicurezza a Carloforte.

Ispirandomi strettamente a questi criteri, oltre che ben inteso a quello di avere la massima uniformità di grandezze, e di concedere tutto il tempo necessario fra stella e stella per eseguire tutte le letture, puntate e scritturazioni, compilai, servendomi dei più attendibili, e moderni cataloghi stellari il seguente elenco di stelle. Nel complesso delle 65 coppie di stelle vi sono ben 34 in cui la differenza delle grandezze resta al di sotto od eguale di 0.5, ed in ben 50 non supera 1.0, e in solo due casi si arriva a 2.3. Le distanze zenitali delle coppie specifiche di ciascun parallelo non raggiungono mai i 5°, mentre quelle comuni si aggirano sui 35°, raggiungendo i 41° per una sola coppia tanto per le stazioni boreali, che per le australi. Le posizioni stellari, che qui comunico sono tratte quasi esclusivamente dai cataloghi di LEWIS e BENJAMIN BOSS (Sant Louis Catalogue, ed Albany Catalogue). Nonostante la loro grande attendibilità non possono però, nè devono considerarsi come definitive, essendo necessario dedurre per esse valori più esatti tenendo conto anche delle altre osservazioni fatte in altri osservatori, ed in altre epoche. Solo così sarà possibile avere la massima attendibilità, e ricavare moti propri sufficientemente sicuri. Di questo la-

o attualmente iniziato, che richiederà però ancora un tempo notevole, riservo comunicare risultati in una ulteriore mia nota. Intanto mi lio a dare gli elementi necessari a definire le coppie di stelle, onde rene possibili le osservazioni, e potendo tali stelle esser utilmente osservate che ad altri strumenti ed in altri osservatori, in qualsiasi parte del ndo essi si trovino, oso sperare possano costituire una base uniforme di trollo e studio per i valori angolari dei micrometri.

COPPIE DI STELLE DA OSSERVARE PER LA DETERMINAZIONE DEL PASSO DEL MICROMETRO.

Stazioni dell' emisfero boreale.

GRUPPO PRIMO. (Da osservare dal 6 al 20 gennaio, e dal 22 ottobre al 5 novembre).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo
1	7.0	4^h	10^m	5^s.631	+4^s.0112	+38°	19′	6″.80	+ 9″.248	Alb. 3424
	7.0		16	53. 08	4.0285	38	26	3. 8	8. 819	Lund. 2281
2	6.8	4	23	19. 548	3.9725	+36	23	8. 58	8. 207	Alb. 3615
	6.7		27	57. 314	3.9881	36	36	58. 87	7. 836	Alb. 3682
3	6.7	4	45	19. 648	3.1311	+ 2	36	31. 13	6. 416	Alb. 3913
	5.7		50	14. 855	3.1271	2	24	38. 54	6. 007	Alb. 3979
4	7.0	4	57	36. 14	4.1049	+38	42	6. 8	5. 392	Lund. 2548
	7.0	5	5	29. 489	4.1108	38	36	35. 19	4. 723	Alb. 4203
5	4.6	5	10	9. 166	3.1370	+ 2	47	29. 01	4. 326	Alb. 4280
	5.4		16	3. 407	3.1314	2	32	8. 06	3. 820	Alb. 4369
6	5.6	5	20	38. 156	3.0685	— 0	12	52. 68	3. 426	Alb. 4455
	6.6		25	21. 327	3.0725	0	1	35. 41	3. 019	Alb. 4539
7	6.4	5	30	51. 219	3.1050	+ 1	22	3. 99	2. 541	Alb. 4643
	7.3		36	42. 608	3.1068	1	27	36. 66	2. 034	Abb. II-3067
8	7.3	5	41	41. 76	4.1008	+37	38	8. 3	1. 599	Lund. 3007
	7.3		47	52. 93	4.1095	37	49	15. 1	1. 059	Lund. 3064

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
9	6.9	10ʰ	13ᵐ	42ˢ.493	+3ˢ.6069	+41°	46′	3″.99	−17″.927	Alb.	8779
	5.9		18	37. 263	3. 5798	41	32	8. 85	18. 115	Alb.	8834
10	5.8	10	23	55. 331	3. 5611	+41	54	32. 00	18. 308	Alb.	8898
	7.0		31	36. 954	3. 5290	42	13	11. 17	18. 571	Alb.	8990
11	7.2	10	36	24. 31	3. 4481	+38	9	10. 7	18. 730	Lund.	5170
	6.9		44	59. 547	3. 4073	37	53	14. 61	18. 979	Alb.	9143
12	6.2	10	50	22. 094	3. 0595	− 1	56	1. 08	19. 125	Alb.	9204
	5.0		58	45. 988	3. 0597	2	9	39. 00	19. 333	Alb.	9311
13	5.7	11	3	51. 236	3. 0857	+ 2	16	56. 05	19. 446	Alb.	9381
	6.8		10	48. 415	3. 0857	2	35	47. 35	19. 583	Alb.	9457
14	6.0	11	15	50. 253	3. 0816	+ 1	58	48. 77	19. 673	Alb.	9520
	5 5		20	57. 603	3. 0799	1	44	15. 20	19. 755	Alb.	9575
15	5.2	11	24	51. 086	3. 0844	+ 3	11	13. 55	19. 808	Alb.	9623
	5.8		31	18. 041	3. 0829	3	23	40. 05	19. 888	Alb.	9699
16	6.4	11	35	22. 598	3. 1695	+33	57	30. 30	19. 929	Alb.	9749
	6.1		48	2. 655	3. 1196	+33	42	29. 66	20. 017	Alb.	9873

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

GRUPPO TERZO. (Da osservare dal 22 aprile al 6 maggio e dal 7 al 21 luglio).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
17	7.3	16ʰ	11ᵐ	22ˢ.930	+2ˢ.0762	+39°	58′	30″.08	— 9″.148	Alb.	13101
	5.5		17	52. 027	2. 1526	39	51	4. 12	8. 962	Alb.	13168
18	5.6	16	29	38. 425	2. 9510	+ 5	38	51. 33	7. 699	Alb.	13307
	6.7		34	36. 318	2. 9555	5	23	50. 82	7. 298	Alb.	13366
19	5.9	16	38	40. 213	3. 0448	+ 1	17	35. 45	6. 964	Alb.	13422
	6.0		42	26. 644	3. 0483	1	7	43. 73	6. 654	Alb.	13464
20	5.5	16	47	24. 398	2. 9093	+ 7	20	59. 78	6. 243	Alb.	13530
	6.8		58	23. 715	2. 9032	7	30	57. 57	5. 324	Alb.	13669
21	5.9	17	2	13. 474	3. 0553	+ 0	47	31. 63	4. 999	Alb.	13725
	6.8		7	11. 863	3. 0604	0	33	20. 89	4. 578	Alb.	13792
22	7.2	17	11	26. 287	2. 0132	+39	3	15. 39	4. 216	Alb.	13850
	6.0		16	22. 357	2. 0154	38	52	16. 56	3. 793	Alb.	13926
23	6.4	17	22	1. 057	2. 0198	+38	38	7. 90	3. 306	Alb.	14018
	6.4		28	39. 915	2. 0040	38	55	33. 46	2. 733	Alb.	14119
24	6.8	17	36	13. 869	2. 0791	+36	46	49. 07	2. 076	Alb.	14220
	7.1		46	53. 878	2. 0648	37	4	52. 56	1. 145	Alb.	14385

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si é tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo
25	7.3	22^h	8^m	40^s.159	+2^s.4866	+43°	13′	56″.44	+17″.724	Alb. 19184
	7.0		12	33. 394	2. 5006	43	28	32. 50	17. 882	Alb. 19250
26	6.3	22	19	16. 524	2. 5653	+41	46	30. 26	18. 139	Alb. 19342
	7.3		28	54. 96	2. 6088	41	54	49. 6	18. 481	Pul.M. 3182
27	6.1	22	36	51. 206	2. 7121	+37	16	47. 06	18. 739	Alb. 19595
	6.2		40	11. 751	2. 7233	37	29	17. 67	18. 840	Alb. 19653
28	6.9	22	49	29. 722	3. 0501	+ 3	13	59. 86	19. 102	Alb. 19775
	4.6	23	0	49. 359	3. 0522	3	29	47. 95	19. 379	Alb. 19933
29	5.6	23	5	36. 269	3. 0631	+ 1	48	0. 15	19. 482	Alb. 20013
	7.1		10	37. 115	3. 0636	1	52	33. 10	19. 579	Alb. 20096
30	7.1	23	26	25. 732	3. 0778	— 1	21	57 .73	19. 828	Alb. 20338
	6.0		31	3. 737	3. 0777	1	34	43 .89	19. 885	Alb. 20405
31	6.6	23	34	59. 511	2. 9231	+45	52	2. 97	19. 924	Alb. 20457
	5.1		43	3. 053	2. 9705	46	5	13. 79	19. 989	Alb. 20550
32	6.1	23	52	3. 455	3. 0676	+ 6	44	15. 12	20 031	Alb. 20670
	4.0		56	13. 467	3. 0705	6	31	55 .08	20. 042	Alb. 20727

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

COPPIE DI STELLE DA OSSERVARE PER LA DETERMINAZIONE DEL PASSO DEL MICROMETRO.

Stazione di Batavia.

GRUPPO PRIMO. (Da osservare dal 6 al 20 gennaio e dal 22 ottobre al 5 novembre).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
1	7.1	4^h	9^m	$59^s.800$	$+2^s.9373$	$-6°$	32′	16″.41	+9″.256	Alb.	3427
	6.3		17	41. 754	2. 9383	6	23	12. 47	8. 654	Alb.	3544
2	7.3	4	22	45. 91	2. 9604	− 5	17	18. 9	8. 253	Abb.III.	1292
	6.8		30	46. 938	2. 9555	5	25	58. 65	7. 607	Alb.	3727
3	6.7	4	45	19. 648	3. 1311	+ 2	36	31. 13	6. 416	Alb.	3913
	5.7		50	14. 855	3. 1271	2	24	38. 54	6. 007	Alb.	3979
4	7.3	4	54	58. 27	2. 9342	− 6	11	34. 0	5. 614	Vi.	1284
	6.7	5	1	21. 831	2. 9347	6	6	49. 69	5. 073	Alb.	4148
5	4.6	5	10	9. 166	3. 1370	+ 2	47	29. 01	4. 326	Alb.	4280
	5.4		16	3. 407	3. 1314	2	32	8. 06	3. 820	Alb.	4369
6	5.6	5	20	38. 156	3. 0685	− 0	12	52. 68	3. 426	Alb.	4455
	6.6		25	21. 327	3. 0725	0	1	35. 41	3. 019	Alb.	4538
7	6.4	5	30	51. 219	3. 1050	+ 1	22	3. 99	2. 541	Alb.	4643
	7.3		36	42. 608	3. 1068	1	27	36. 66	2. 034	Abb. II.	3067
8	6.7	5	41	38. 331	2. 9122	− 6	53	20. 09	1. 603	Alb.	4860
	7.3		56	53. 192	2. 9185	6	35	58. 30	0. 272	Alb.	5119

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
9	7.3	10^h	10^m	$45^s.289$	$+3^s.0203$	-4°	55′	18.″69	−17″.810	Alb.	8752
	6.9		16	31.063	3.0240	4	48	9.44	18.035	Alb.	8816
10	6.1	10	20	24.594	3.0360	−3	46	12.38	18.181	Alb.	8859
	6.6		23	45.076	3.0341	4	4	55.62	18.302	Alb.	8899
11	7.1	10	34	0.536	2.9994	−8	31	37.59	18.649	Alb.	9020
	7.0		39	26.927	3.0050	8	24	46.08	18.819	Alb.	9075
12	6.2	10	50	22.094	3.0595	−1	56	1.08	19.125	Alb.	9204
	5.0		58	45.988	3.0597	2	9	39.00	19.333	Alb.	9311
13	5.7	11	3	51.236	3.0857	+2	16	56.05	19.446	Alb.	9381
	6.8		10	48 415	3.0857	2	35	47.35	19.583	Alb.	9457
14	6.0	11	15	50.253	3.0816	+1	58	48.77	19.673	Alb.	9520
	5.5		20	57.603	3.0799	1	44	15.20	19.755	Alb.	9575
15	5.2	11	24	51.086	3.0844	+3	11	13.55	19.808	Alb.	9623
	5.8		31	18.041	3.0829	3	23	40.05	19.888	Alb.	9699
16	5.8	11	47	58.103	3.0668	−4	59	58.15	20.016	Alb.	9871
	7.1		52	22.261	3.0693	4	48	1.29	20.033	Alb.	9923

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

GRUPPO TERZO. (Da osservare dal 22 aprile al 6 maggio e dal 7 al 21 luglio).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo
17	6.1	16^h	9^m	$47^s.101$	$+3.^s1574$	-4°	$4'$	$4''.44$	$-9''.272$	Alb. 13063
	6.1		13	45. 744	3. 1526	3	48	21. 90	8. 962	Alb. 13119
18	5.6	16	29	38. 425	2. 9510	+ 5	38	51. 33	7. 699	Alb. 13307
	6.7		34	36. 318	2. 9555	5	23	50. 82	7. 298	Alb. 13366
19	5.9	16	38	40. 213	3. 0448	+ 1	17	35. 45	6. 964	Alb. 13422
	6.0		42	26. 644	3. 0483	1	7	43. 73	6. 654	Alb. 13464
20	5.5	16	47	24. 398	2. 9093	+ 7	20	59. 78	6. 243	Alb. 13530
	6.8		58	23. 715	2. 9032	7	30	57. 57	5. 324	Alb. 13669
21	5.9	17	2	13. 474	3. 0553	+ 0	47	31. 63	4. 999	Alb. 13725
	6.8		7	11. 863	3. 0604	0	33	20. 89	4. 578	Alb. 13792
22	7.2	17	11	13. 24	3. 1669	− 4	5	36. 2	4. 235	Strs. 5843
	7.3		16	40. 162	3. 1648	3	59	17. 47	3. 767	Alb. 13917
23	6.4	17	26	34. 886	3. 2091	− 5	52	17. 73	2. 912	Alb. 14078
	6.8		32	29. 561	3. 2145	6	5	1. 52	2. 401	Alb. 14168
24	7.3	17	43	16. 119	3. 2595	− 7	57	36. 07	1. 462	Alb. 14326
	6.9		51	42. 667	3. 2542	7	43	22. 43	0. 725	Alb. 14462

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
25	6 6	22^h	6^m	19^s.834	+3^s.1605	— 7°	49′	53″.64	+17″.628	Alb.	19135
	4.3		13	39. 957	3. 1580	8	4	57. 31	17. 924	Alb.	19262
26	6.1	22	20	23. 402	3. 1471	— 7	29	54. 59	18. 181	Alb.	19348
	6.9		23	25. 582	3. 1510	7	40	57. 34	18. 291	Alb.	19387
27	5.9	22	30	57. 313	3. 0897	— 1	53	0. 10	18. 550	Alb.	19505
	7.3		44	24. 426	3. 0890	2	6	18. 87	18. 963	Alb.	19709
28	6.9	22	49	29. 722	3. 0501	+ 3	13	59. 86	19. 102	Alb.	19775
	4.6	23	0	49. 359	3. 0522	3	29	47. 95	19. 379	Alb.	19933
29	5 6	23	5	36. 269	3. 0631	+ 1	48	0. 15	19. 482	Alb.	20013
	7.1		10	37. 115	3. 0636	1	52	33. 10	19. 579	Alb.	20096
30	7.1	23	26	25. 732	3. 0778	— 1	21	57. 73	19. 828	Alb.	20338
	6.0		31	3. 737	3. 0777	1	34	43. 89	19. 885	Alb.	20405
31	6.1	23	38	2. 538	3. 1003	—12	0	48. 30	19. 951	Alb.	20491
	5 9		44	10. 670	3. 0931	12	14	32. 77	19. 996	Alb.	20566
32	6.1	23	52	3. 455	3. 0676	+ 6	44	15. 12	20. 031	Alb.	20670
	4.0		56	13. 467	3. 0705	6	31	55. 08	20. 042	Alb.	20727

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

COPPIE DI STELLE DA OSSERVARE PER LA DETERMINAZIONE DEL PASSO DEL MICROMETRO.

Stazioni dell' emisfero meridionale.

GRUPPO PRIMO. (Da osservare dal 6 al 20 gennaio, e dal 22 ottobre al 5 novembre).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
1	6.6	4ʰ	5ᵐ	26ˢ 40	+2ˢ.1823	— 37°	13′	14″.7	+ 9.″608	S. L.	1994
	6.6		13	1. 44	2. 1625	37	20	45. 5	9. 019	S. L.	2056
2	7.0	4	20	59. 48	2. 3063	— 32	17	25. 4	8. 393	S. L.	2124
	7.0		25	22. 85	2. 2921	32	32	29. 5	8. 043	S. L.	2168
3	7.2	4	29	4. 23	2. 1809	— 35	54	5. 6	7. 746	S. L.	2217
	7.1		32	44. 13	2. 1817	35	41	57. 6	7. 448	S. L.	2251
4	6.7	4	45	19. 648	3. 1311	+ 2	36	31. 13	6. 416	Alb.	3913
	5.7		50	14. 855	3. 1271	2	24	38. 54	6. 007	Alb.	3979
5	4.6	5	10	9. 166	3. 1370	+ 2	47	29. 01	4. 326	Alb.	4280
	5.4		16	3. 407	3. 1314	2	32	8. 06	3. 820	Alb.	4369
6	5.6	5	20	38. 156	3. 0685	— 0	12	52. 68	3. 426	Alb.	4455
	6.6		25	21. 327	3. 0725	0	1	35. 41	3. 019	Alb.	4539
7	6.4	5	30	51. 219	3. 1050	+ 1	22	3. 99	2. 541	Alb.	4643
	7.3		36	42. 608	3. 1068	1	27	36. 66	2. 034	Abb. II	3067
8	6.4	5	45	11. 75	2. 1151	— 35	41	45. 0	1. 294	S. L.	2901
	6.8		52	0. 79	2. 1060	35	54	47. 4	0. 698	S. L.	2993

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo	
9	6.2	10ʰ	12ᵐ	43ˢ.03	+2ˢ.6315	— 36°	13′	8″.1	—17″.887	S. L.	6370
	6.4		15	59. 49	2. 6394	36	30	13. 4	18. 014	S. L.	6413
10	6.9	10	22	18. 31	2. 6413	— 37	59	53. 1	18. 250	S. L.	6498
	7.2		26	26. 91	2. 6623	37	45	5. 4	18. 396	S. L.	6547
11	6.8	10	36	32. 96	2. 7227	— 36	21	52. 3	18. 729	S. L.	6702
	6.8		41	53. 98	2. 7412	36	36	52. 0	18. 891	S. L.	6787
12	6.2	10	50	22. 094	3. 0595	— 1	56	1. 08	19. 125	Alb.	9204
	5.0		58	45. 988	3. 0597	2	9	39. 00	19. 333	Alb.	9311
13	5.7	11	3	51. 236	3. 0857	+ 2	16	56. 05	19. 446	Alb.	9381
	6.8		10	48. 415	3. 0857	2	35	47. 35	19. 583	Alb.	9457
14	6.0	11	15	50. 253	3. 0816	+ 1	58	48. 77	19. 673	Alb.	9520
	5.5		20	57. 603	3. 0799	1	44	15. 20	19. 755	Alb.	9575
15	5.2	11	24	51. 086	3. 0844	+ 3	11	13. 55	19. 808	Alb.	9623
	5.8		31	18. 041	3. 0829	3	23	40. 05	19. 888	Alb.	9699
16	7.0	11	35	49. 73	2. 9552	— 39	58	13. 0	19. 932	S. L.	7450
	7.1		42	25. 59	2. 9865	40	11	0. 9	19. 985	S. L.	7535
16ᵇⁱˢ	7.2	11	47	41. 09	3. 0267	— 32	48	27. 7	20. 016	S. L.	7594
	6.3		54	0. 71	3. 0503	32	58	52. 6	20. 037	S. L.	7649

Le posizioni stellari valgono per il 1910.0, e non si è tenuto conto dei moti propri.

GRUPPO TERZO. (Da osservare dal 22 aprile al 6 maggio e dal 7 al 21 luglio).

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo
17	7.0	16^h	10^m	$54^s.29$	$+4^s.0513$	$-39°$	28′	35″.8	$-9''.185$	S. L. 10454
	6.2		16	28. 83	4. 0565	39	17	10. 1	8. 749	S. L. 10522
18	5.6	16	29	38. 425	2. 9510	+ 5	38	51. 33	7. 699	Alb. 13307
	6.7		34	36. 318	2. 9555	5	23	50. 82	7. 298	Alb. 13366
19	5.9	16	38	40. 213	3. 0448	+ 1	17	35. 45	6. 964	Alb. 13422
	6.0		42	26. 644	3. 0483	1	7	43. 73	6. 654	Alb. 13464
20	5.5	16	47	24. 398	2. 9093	+ 7	20	59. 78	6. 243	Alb. 13530
	6.8		58	23. 715	2. 9032	7	30	57. 57	5. 324	Alb. 13669
21	5.9	17	2	13. 474	3. 0553	+ 0	47	31. 63	4. 999	Alb. 13725
	6.8		7	11. 863	3. 0604	0	33	20. 89	4. 578	Alb. 13792
22	7.2	17	13	3. 91	3. 8373	− 30	17	9. 5	4. 077	S. L. 11276
	7.2		18	18. 21	3. 8454	30	26	36. 7	3. 626	S. L. 11351
23	6.4	17	25	17. 86	4. 1228	− 38	28	10. 8	3. 024	S. L. 11459
	6.6		30	57. 85	4. 1374	38	45	39. 6	2. 532	S. L. 11536
24	6.8	17	39	57. 04	4. 1426	− 38	46	42. 7	1. 752	S. L. 11654
	6.9		45	15. 45	4. 1516	38	57	54. 7	1. 288	S. L. 11720

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, ed in esse non si è tenuto conto dei moti propri.

Coppia	Gr.	Ascensione retta			Prec.	Declinazione			Prec.	Catalogo
25	6.7	22h	8m	7s.91	+3s.5080	— 34°	45′	39.″2	+17″.702	S. L. 14407
	6.9		13	40.74	3.4927	35	3	36.5	17.936	S. L. 14450
26	7.3	22	18	36.67	3.4705	— 34	47	33.6	18.115	S. L. 14500
	6.9		31	2.02	3.4271	34	59	7.1	18.553	S. L. 14605
27	5.6	22	35	28.36	3.3907	— 33	23	39.3	18.696	S. L. 14642
	6.8		43	32.65	3.3627	33	29	56.6	18.938	S. L. 14704
28	6.9	22	49	29.722	3.0501	+ 3	13	59.86	19.102	Alb. 19775
	4.6	23	0	49.359	3.0522	3	29	47.95	19.379	Alb. 19933
29	5.6	23	5	36.269	3.0631	+ 1	48	0.15	19.482	Alb. 20013
	7.1		10	37.115	3.0636	1	52	33.10	19.579	Alb. 20096
30	7.1	23	26	25.732	3.0778	— 1	21	57.73	19.828	Alb. 20338
	6.0		31	3.737	3.0777	1	34	43.89	19.885	Alb. 20405
31	6.5	23	33	55.26	3.1685	— 32	12	12.0	19.914	S. L. 15100
	7.2		37	58.62	3.1545	32	24	17.3	19.952	S. L. 15132
32	6.1	23	52	3.455	3.0676	+ 6	44	15.12	20.031	Alb. 20670
	4.0		56	13.467	3.0705	6	31	55.08	20.042	Alb. 20727

Le posizioni stellari valgono per il 1940.0, ed in esse non si è tenuto conto dei moti propri.

Commemorazione del socio straniero

HENRY FAIRFIELD OSBORN

letta dal socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

nell' adunanza del dì 4 aprile 1936 - XIV.

Il 16 dello scorso marzo è giunta alla nostra Accademia la notizia della morte, avvenuta il 6 novembre 1935, del dr. Henry Fairfield Osborn, presidente del Museo Americano di Storia naturale di New York, che, in qualità di socio straniero, era stato incaricato di rappresentare il sodalizio di Napoli alla prossima celebrazione del terzo centenario della fondazione della Harvard University di Cambridge, Mass.

Scompare con lui una delle figure più note e più rappresentative nel campo degli studi paleontologici, che ha incancellabilmente legato il proprio nome alle ricerche più interessanti, più moderne, più complete sopra mammiferi e rettili fossili; scompare il sapiente organizzatore e stimolatore delle più importanti esplorazioni geologiche asiatiche; scompare il fondatore della fiorente scuola paleontologica americana, che tanti nomi illustri ha vantato in questi ultimi decenni e sì largo contributo di studi ha offerto alla conoscenza dei vertebrati fossili del nuovo continente.

Nato a Fairfield nel Connecticut il dì 8 agosto 1857 e compiuta la sua educazione al Lyons Collegiate Institute di New York, H. F. Osborn si laureò a Princeton nel 1877 e venne subito dopo in Europa a perfezionare i suoi studi con Balfour a Cambridge e con Huxley a Londra. Dal 1881 assistente all' Università di Princeton e dal 1883 al 1890 professore di anatomia comparata, passò poscia a New York in qualità di professore di biologia alla Columbia University e di curatore delle collezioni paleontologiche dei vertebrati al Museo Americano di Storia naturale (1891), e più tardi come professore di geologia (1896). A New York si svolse tutta la sua successiva attività ufficiale, tanto nell' ambiente del Museo predetto di cui divenne curatore, poi vice presidente e quindi presidente dal 1908, quanto nelle cariche di paleontologo del Geological Survey degli Stati Uniti e di quello del Canada e in numerose altre che gli vennero via via affidate. Basterà citare, fra questi ultimi uffici, la presidenza dell' American Morpho-

HENRY FAIRFIELD OSBORN

N. il dì 8 agosto 1857 M. il dì 6 novembre 1935

cal Society, della Marine Biological Association, dell' American Asso-ion for the advancement of science, della New York Academy of Scien- ecc., per comprendere a quale importanza sia gradatamente assurto il f. OSBORN e di quanta stima sia stato circondato presso i suoi conna-iali.

Specialmente versato, negli anni giovanili, negli studi di zoologia, egli rdì nella ricerca scientifica con lavori sopra la struttura e lo sviluppo cervello. Ma fu ben presto attratto da quelle indagini paleontologiche vertebrati, nelle quali doveva poi eccellere per numero ed importanza contributi.

Chi percorra, sia pure fugacemente, il lunghissimo elenco bibliogra-) degli scritti dell' OSBORN, ricco di oltre un migliaio di numeri, non può n rimanere impressionato dalla singolare attività di questo studioso, che r in mezzo alle molteplici cure dei suoi svariati uffici, ha saputo e potuto endere, per quasi un sessantennio di vita scientifica, con lena instan-bile che non conobbe soste, con entusiasmo costante che gli anni non sero ad affievolire, con competenza di specialista provetto che tutti gli onoscono, a ricerche importanti in vari campi delle scienze naturali, e ratutto a studi fondamentali sull' anatomia, distribuzione, evoluzione e genia dei rettili e dei mammiferi fossili.

Il valore di quest' opera paleontologica, che lascerà senza dubbio orma fonda e duratura presso gli studiosi di ogni paese, è attestato dalla na mondiale che hanno acquistata parecchi fra i suoi scritti, tradotti italiano, in francese, in tedesco, in russo, in giapponese ecc., nonchè ll' importanza delle esplorazioni e scoperte, che, ideate e promosse da lui effettuate sotto la sua personale direzione, portarono in questi ultimi de-nni alla conoscenza geologica e paleontologica di vaste e interessantis-me regioni, specialmente asiatiche.

Per ciò che riguarda i lavori di lui, par quasi superfluo ripetere, come li sia a buon diritto concordemente considerato quale una delle maggiori torità negli studi di mammologia ed erpetologia fossile. Aveva visitato usei pubblici e collezioni private, non soltanto in America ma anche in iropa, ed era divenuto familiare con le rarità paleontologiche, ovunque ssero conservate. Acquistata in tal modo una profonda conoscenza dei rtebrati dei principali giacimenti e raccolta la più larga messe di osser-izioni comparative, potè risalire dai particolari studi anatomici alle sintesi ù ardite e geniali, alle questioni filosofiche più ardue e più generali, iali quelle riguardanti i problemi sull' origine e l' antichità dell' uomo, ill' evoluzione delle specie, sulla ereditarietà dei caratteri acquisiti, sulle utazioni, sulle variazioni per adattamento, ecc.

Fra i volumi più noti e di uso generale perchè interessanti una più irga schiera di studiosi, anche non paleontologi, si possono qui ricordare, i ordine cronologico, i seguenti:

From the Greecks to Darwin (Biolog. Serie Columbia Univ., Macmillan, 1894, con numerose ristampe successive, e trad. ital., ed. Bocca, Torino, 1901);

Evolution of mammalian molar teeth to and from the triangular typ (New York, Macmillan, 1907);

The age of mammals in Europe, Asia and north America (New York Macmillan, 1910, con parecchie ediz. americane e trad. tedesca);

The origin and evolution of life (Nat. Ac. Sc., 1917, con varie traduzioni in francese, tedesco, giapponese ecc.);

Men of the old stone age, their environment, life and art (New York, Ch. Schribner, 1918, con varie ediz. amer. e trad. in russo);

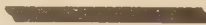
Impressions of great Naturalist (New York, Ch. Schribner, 1924);

The Earth speaks to Bryan (Id., 1925);

Aristogenesis, the creative principle in the origin of species (The Amer. Naturalist, vol. LXVIII, 1934, n. 716).

Ma ancora più importanti, nel campo strettamente paleontologico, sono gli studi diretti alla conoscenza degli Equidi, dei Rinoceronti, dei Titanoteri, degli Amblipodi, dei Proboscidati, e dei vari gruppi di Dinosauri. Basterebbe citare, fra i tanti, il grosso lavoro sugli *Equidi dell' Oligocene, Miocene e Pliocene dell' America settentrionale* e i due magistrali volumi sopra *The Titanotheres of ancient Wyoming, Dakota and Netraska*, che costituiscono la dimostrazione più evidente dei brillanti risultati a cui può giungere un sodo ingegno, sintetico e coordinatore, quando non facciano difetto i mezzi di esplorazione e di indagine e si possa contare sulla valida collaborazione di una schiera di provetti specialisti. Analogo a questo colossale lavoro, che rappresenta il frutto di circa un ventennio di studi, è l' altro relativo ai proboscidati, che assorbì gli ultimi anni e le ultime attività di OSBORN. Di quest' altra opera intensiva di gran mole noi non conosciamo ancora, al momento in cui scriviamo, la stesura definitiva (essendo il 1.° volume in corso di stampa nel 1934, e il 2.° in avanzata preparazione durante il 1935), ma possiamo ugualmente valutare l' importanza dei risultati dalle conclusioni sommarie, che l' A. ha pubblicate in quest' ultimo biennio sopra l' origine, l' evoluzione e la migrazione dei proboscidei: risultati, che lo stesso OSBORN ha definiti « rivoluzionari » rispetto alle precedenti conoscenze, tanto per ciò che riguarda i *Mastodontoidea*, quanto per gli *Elephantoidea*. Basta infatti ricordare, che i primi, i quali ai tempi di DARWIN comprendevano solo 7 specie appartenenti a 2 generi, ora hanno, secondo l' OSBORN, non meno di 182 specie distribuite in 23 generi; mentre i secondi, che nell' anno 1859 sommavano a 10 specie racchiuse tutte nell' unico gen. *Elephas*, vengono distribuiti, in base ai resti finora scoperti, in 11 generi e 97 specie.

Tali risultati mettono, del resto, in particolare rilievo un' altra spiccatissima dote dell' OSBORN, cioè quella sapiente abilità organizzativa, la quale

manifestò anche in altre occasioni molteplici, dalla meticolosa prepara-
ne di importanti spedizioni scientifiche di esplorazione geo-paleontologica
'ordinamento e all'incremento delle collezioni del grandioso Museo Ame-
cano di Storia naturale, dalla fondazione del magnifico Giardino zoologico
Nuova York alla direzione di congressi ed assemblee scientifiche o edu-
tive svariate.

Sono note le alterne vicende con cui, sotto gli auspicî del Museo Ame-
cano di Storia naturale, la direzione di Roy Chapman ANDREWS e la colla-
razione di vari geologi, paleontologi e topografi, furono condotte in Cina
in Mongolia, a cominciare dall'anno 1922, le importanti esplorazioni, già
uttifere di risultati ragguardevoli nei campi geografico, geologico, paleon-
logico e paletnologico, che successivamente, a causa degli ostacoli frap-
osti dal governo cinese per un male inteso spirito di nazionalismo e di
transigenza, dovettero essere sospese nel 1929; ed è nota altresì la te-
acia, con la quale il nostro commemorato, adoperando tutto il suo prestigio
la sua autorità, contribuì da un lato a superare le difficoltà per la pro-
ecuzione degli scavi, e dall'altro a far conoscere il copioso materiale fos-
lifero rinvenuto.

Ma non solo di fossili e di terreni americani ed asiatici si occupò
OSBORN; perchè, come si è innanzi ricordato, egli sapeva riconoscere e
alorizzare le rarità paleontologiche ovunque si trovassero. E noi italiani
on possiamo non rammentare, nello stesso tempo con dolore e con soddi-
fazione, la sorte toccata all'unico ben conservato teschio di *Elephas an-
iquus* che nell'estate del 1926 fu rinvenuto a Pignataro Interamna, nella
alle del Liri: con dolore, perchè in luogo di essere acquisito al patrimonio
ello Stato emigrò in America, comprato dal naturalista che aveva saputo
iconoscerne l'eccezionale valore; con soddisfazione, perchè venne restaurato
n quel Museo Americano ove si conservano tanti altri importanti resti di
roboscidati fossili di tutte le parti del mondo, e studiato ed illustrato,
dapprima col nome *Palaeoloxodon antiquus italicus* e quindi con l'altro
li *Hesperoloxodon antiquus italicus*, da quel valoroso paleontologo che fu
Henry Fairfield OSBORN. Di tale elefante abbiamo ora, nel Museo paleonto-
logico di Napoli, il modello in gesso della ricostruzione, fatta sotto la di-
rezione dello stesso OSBORN e inviataci in dono dal Museo Americano di
New York.

Estremamente lungo sarebbe l'elenco degli onori che vennero conferiti
al nostro commemorato e delle Accademie e Società scientifiche che lo
vollero socio. Per la sua spiccata personalità scientifica non solo era uno
degli uomini più in vista nel mondo intellettuale americano, ma godeva
altresì di una larga cerchia di simpatie e amicizie in Europa; frutto, oltre
che dei suoi importantissimi lavori, dei frequenti viaggi e delle personali
doti. Membro straniero della Società Linneana e di quella geologica di

Londra, della Società letteraria e filosofica di Manchester, della British Association, apparteneva all' Accademia nazionale dei Lincei dal 1929.

La nostra Accademia, che nominandolo, nel 1933, suo socio straniero aveva voluto offrirgli un tributo di ammirazione e di stima, ne ricorda ora la lunga, vasta, multiforme attività scientifica diretta al progresso delle discipline geologiche e paleontologiche con tanto fervore e con tanta sapienza coltivate; e l'unanime cordoglio, con cui essa si associa al generale rimpianto per la morte di lui, è mitigato dalla sicurezza che non scompaiono con l'uomo i frutti migliori del suo ingegno, i quali invece restano a tramandare nel tempo il ricordo di una vita, come quella di Osborn, interamente e nobilmente spesa al servizio della scienza.

Orbita definitiva della Cometa 1910 - IV (Metcalf)

Nota della Dott. **M. Viaro**, *presentata dal socio corr.* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 4 aprile 1936 - XIV)

Sunto. — Si riferisce brevemente sui risultati ottenuti nella ricerca definitiva ›gli elementi della Cometa 1910 - IV. Dopo aver preso in considerazione 656 po-zioni osservate nel periodo che va dal giorno 8 agosto 1910 al 23 giugno 1911, confrontato con un'effemeride calcolata appositamente, sulla base di 32 luoghi ›rmali, tenendo conto delle perturbazioni prodotte da Giove, si sono ricavate le ›rrezioni degli elementi e trovata un' orbita ellittica molto allungata.

Scoperta visualmente da Metcalf in Taunton nella posizione:

$$\alpha \text{ app.} = 16^h\, 27^m \qquad \delta \text{ app.} = 16^0\, 0'$$

8 agosto e identificata il giorno dopo su una lastra fotografica, la cometa)10 *b*, che nella designazione definitiva divenne 1910 IV, fu seguita da ari osservatori dal 10 agosto 1910 fino al 23 giugno 1911.

Al momento della scoperta era un oggetto di circa 9ª grandezza, ed ppariva simile a una nuvoletta di 2′ di diametro, con nucleo e piccola ›da. Nel dicembre era di 10^m (Biesbroeck), nel gennaio di $11^m.5$, nell'aprile 13^m. Il suo diametro si mantenne sempre esteso per un leggero velo, ıe nell'aprile ricopriva circa 35″, però il nucleo caratteristico la rese, fino ılla fine di maggio, un sicuro oggetto di osservazione.

Le osservazioni di cui sono venuta a conoscenza sono in numero di 656: maggior contributo fu dato dall'Osservatorio di Napoli con 102 posizioni :tenute in massima parte da Guerrieri, e dall'Osservatorio di Nizza, dove :haumasse seguendola fino alla fine di maggio ottenne 81 posizioni. Anche li osservatori di Algeri (78 posizioni), Bergedorf, Bothkamp seguirono la ›meta durante quasi tutto il periodo: la serie delle osservazioni si chiude ›n una posizione data da Sy (Algeri) il 23 giugno. Alcuni errori trovati el confrontare i luoghi osservati con la effemeride poterono essere eliminati regando gli osservatori di rivedere i calcoli delle posizioni per le quali si ttenevano O-C troppo diversi dai rimanenti. Molti osservatori risposero ortesemente all'invito. Inoltre per molte stelle di confronto si tenne conto i nuove posizioni date da cataloghi recenti.

Per i sensibili scarti riscontrati fra le posizioni osservate della cometa ı confronto ai luoghi calcolati, elementi parabolici ottenuti mediante le rime osservazioni, si dovettero abbandonare quasi subito: L'effemeride

approssimata usata per identificarla nel corso delle osservazioni fu ottenuta mediante il seguente sistema:

$$T = 1910 \text{ settembre } 16.32742 \text{ (T. M. di Berlino)}$$

$$1910.0 \left\{ \begin{array}{lll} \omega = 50^\circ & 58' & 21''.1 \\ \Omega = 289 & 31 & 26.\ 3 \\ i = 121 & 3 & 19.\ 6 \end{array} \right.$$

$$\log q = 0.289\ 694$$

calcolato da H. Kobold con le osservazioni dell' 11, 17 e 25 agosto, e corretto servendosi di una posizione del 18 settembre.

Il movimento della cometa è retrogrado.

Come base della nuova determinazione della prima orbita ho scelto le osservazioni del 21 agosto 1910 (Algeri e Nizza), del 30 dicembre 1910 (Bergedorf e Algeri), del 3 maggio 1911 (Nizza e Algeri). Calcolate mediante il sistema di elementi dati da Kobold, le correzioni di parallasse e di aberrazione necessarie a ridurre geocentriche le osservazioni scelte e a vere le date corrispondenti in tempo medio di Berlino, ottenni le seguenti posizioni:

T. M. di Berlino			α vera 1910.0			δ vera 1910.0		
1910	agosto	21.383142	15^h	50^m	$44^s.75$	16°	$2'$	$56''.6$
	dicembre	30.671270	15	51	30. 87	34°	$15'$	$36''.7$
1911	maggio	3.385470	8	56	41. 27	59°	$17'$	$14''.9$

e da esse con il metodo di Olbers e quattro successive approssimazioni il sistema di elementi parabolici:

$$T = 1910 \text{ settembre } 16.339250 \text{ (T. M. di Berlino)}$$

$$1910.0 \left\{ \begin{array}{lll} \omega = 50^\circ & 58' & 56''.13 \\ \Omega = 289^\circ & 31' & 37''.76 \\ i = 121^\circ & 3' & 12''.44 \end{array} \right.$$

$$\log q = 0.289\ 6472$$

i quali danno una rappresentazione del luogo intermedio che lascia i residui:

$$d\lambda \cos\beta = +4''.09$$
$$d\beta = +4''.81.$$

Mediante le equazioni:

$$x = 9.770\ 8426 \ .\ r. \operatorname{sen}(196^\circ\ 28'\ 21''.71 + v)$$
$$y = 9.999\ 2831 \ .\ r. \operatorname{sen}(290\ \ 59\ \ 11.\ 80 + v)$$
$$z = 9.908\ 1907 \ .\ r. \operatorname{sen}(\ 23\ \ 22\ \ 39.\ 07 + v)$$

r il 1910, e:

$$x = 9.770\ 9131\ .\ r.\ \text{sen}\ (196^\circ\ 27'\ 7''.34 + v)$$
$$y = 9.999\ 2786\ .\ r.\ \text{sen}\ (290^\circ\ 58'\ 44.65 + v)$$
$$z = 9.908\ 1603\ .\ r.\ \text{sen}\ (23\ \ 22\ \ 40.85 + v)$$

:r il 1911, furono calcolate giorno per giorno dall'8 agosto 1910 al 25 giugno
'11 (omettendo il periodo fra il 30 maggio e l'11 giugno in cui mancano
osservazioni) le coordinate eliocentriche equatoriali. Trasformate le coor-
nate eliocentriche in geocentriche si determinarono le α e δ riferite rispet-
vamente all'equinozio medio 1910.0 e 1911.0; e queste ultime furono ridotte
vere mediante le correzioni di processione e nutazione. Poichè l'effemeride
ıva luoghi veri geocentrici, alle osservazioni, prima del confronto, fu appli-
ıta la correzione di parallasse, e si tenne conto del tempo di aberrazione
)ttraendolo dalla data di osservazione ridotta al meridiano di Berlino.

Le date dei luoghi normali furono scelte cercando, per quanto era pos-
bile, di tener conto dell'intervallo di tempo e del numero delle osserva-
ioni: naturalmente per i primi luoghi, cui corrispondono osservazioni più
umerose e sicure, il peso è maggiore. Per determinare i pesi si fece nel
:guente modo: per ogni serata in cui le osservazioni erano molte si deter-
ıinò in α e δ l'O-C medio, e tenendo conto degli scarti fra il valore medio
ttenuto e gli O-C dei singoli osservatori, si potè determinare per quasi tutti
li osservatori l'errore medio di una osservazione e quindi il peso.

Le perturbazioni per effetto di Giove furono calcolate a partire dal luglio
8.5 (T. M. di Berlino) di 40 in 40 giorni (G. Stracke, *Bahnbestimmung der*
'lancten und Kometen. 19. Abschnitt.), e le correzioni per i luoghi normali
ırono ottenute mediante interpolazione grafica. Nei seguenti α e δ corri-
pondenti ai luoghi normali, le perturbazioni sono incluse:

T. M. di Berlino			$d\alpha \cos\delta$	peso	$d\delta$	peso
:910	agosto	13.5	+ 0^s.34	5	— 1''.4	7
		21.5	0. 21	3	0. 1	4
		27.5	0. 21	4	0. 3	5
	settembre	4.5	0. 16	3	+ 1. 3	5
		15 5	0. 17	3	1. 5	4
		28.5	0. 24	4	1. 8	5
	ottobre	14.5	0. 33	3	3. 0	4
	novembre	5.5	0. 26	1	2. 2	2
		25.5	0. 50	1	3. 9	2
	dicembre	28.5	0. 52	0.5	4. 3	1
1911	gennaio	30.5	0. 63	2	4. 8	2
	febbraio	26.5	0. 39	1	7. 2	2

T. M. di Berlino			$d\alpha \cos \delta$	peso	$d\delta$	peso
1911	marzo	26.5	$0^s.18$	1	$5''.6$	1
	aprile	24.5	0. 14	1	5. 4	2
	maggio	21.5	0. 10	0.5	6. 5	1
	giugno	19.5	0. 19	0.5	3. 4	0.5.

Riferiti gli elementi ecclittici all' equatore:

$$\omega' = 23^\circ \; 22' \; 39''.05$$
$$\Omega' = 274 \; 4 \; 2.30$$
$$i' = 125 \; 57 \; 27.51$$

furono calcolati i coefficienti per le 32 equazioni di condizione con le formule di SCHOENFELD, e risolto il sistema di equazioni con il metodo dei minimi quadrati, si ottennero le seguenti correzioni agli elementi:

$$dT = -0.020\,7506 \text{ (in giorni)}$$
$$dq = -0.000\,2522$$
$$de = -0.000\,1879$$
$$d\Omega' = +\ 15''.31$$
$$d\omega' = -\ 38.96$$
$$di' = -\ 5.78\ .$$

Gli elementi ecclittici opportunamente corretti e definitivi sono dunque

$$T = 1910 \text{ settembre } 16.318499 \text{ (T. M. di Berlino)}$$
$$\omega = 50^\circ \; 58' \; 13''.17$$
$$\Omega = 289 \; 31 \; 47.42$$
$$i = 121 \; 3 \; 1.53$$
$$e = 0.999\,8121$$
$$\log q = 0.289\,5910,$$

onde l' orbita risulta una ellisse allungatissima.

Gli O-C ottenuti sostituendo i valori delle incognite nel sistema di equazioni di condizione sono:

T. M. di Berlino			$d\alpha \cos \delta$	$d\delta$
1910	agosto	13.5	$-0^s.09$	$-0''.1$
		21.5	-0.07	$+0.3$
		27.5	$+0.02$	-1.4
	settembre	4.5	-0.02	$+1.0$
		15.5	0.00	$+0.1$
		28.5	$+0.09$	-0.3
	ottobre	14.5	$+0.14$	$+1.1$

T. M. di Berlino		$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
0 novembre	5.5	$-0^s.05$	$-1''.2$
	25.5	$+0.11$	$+0.4$
dicembre	28.5	$+0.01$	-0.1
1 gennaio	30.5	$+0.04$	-0.2
febbraio	26.5	-0.04	$+1.8$
marzo	26.5	$+0.02$	-2.3
aprile	24.5	$+0.05$	-1.4
maggio	21.5	-0.01	$+1.2$
giugno	19.5	-0.01	-0.6

$$\mu = \text{errore medio} = \sqrt{\frac{\Sigma p\varepsilon\varepsilon}{m-n}} = \pm 1.''2522 \quad (m = 32\,,\ n = 6).$$

Aggiungo nella seguente tabella insieme ai residui (II e III colonna) nuti confrontando direttamente i luoghi osservati con l'effemeride cal- ata mediante gli elementi definitivi, le correzioni da apportare agli O-C tener conto delle perturbazioni (IV e V colonna), ed infine nelle ultime colonne i residui definitivi che risultano in buon accordo con gli O-C nuti dal sistema di equazioni:

T. M. di Berlino		$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$ dovuti all' effetto delle perturbazioni	$d\delta$	$d\alpha \cos\delta$ definitivi	$d\delta$
0 agosto	13.5	$-0^s.06$	$-0''.3$	$+0^s.02$	$+0''.3$	$-0^s.04$	$0''.0$
	21.5	-0.05	$+0.4$	$+0.01$	-0.3	-0.04	$+0.1$
	27.5	0.00	-0.5	0.00	0.0	0.00	-0.5
settembre	4.5	-0.01	$+0.5$	0.00	0.0	-0.01	$+0.5$
	15.5	-0.01	$+0.3$	0.00	0.0	-0.01	$+0.3$
	28.5	$+0.04$	-0.5	0.00	0.0	$+0.04$	-0.5
ottobre	14.5	$+0.08$	$+0.4$	$+0.01$	$+0.2$	$+0.09$	$+0.6$
novembre	5.5	-0.08	-1.2	$+0.03$	$+0.2$	-0.05	-1.0
	25.5	$+0.07$	-0.3	$+0.05$	$+0.5$	$+0.12$	$+0.2$
dicembre	28.5	$-0,02$	-1.2	$+0.10$	$+1.2$	$+0.08$	0.0
1 gennaio	30.5	-0.12	-2.1	$+0.17$	$+2.0$	$+0.05$	-0.1
febbraio	26.5	-0.20	-1.1	$+0.19$	$+2.6$	-0.01	$+1.5$
marzo	26.5	-0.04	-6.2	$+0.10$	$+3.9$	$+0.06$	-2.3
aprile	24.5	$+0.10$	-5.7	$+0.01$	$+5.5$	$+0.11$	-0.2
maggio	21.5	-0.03	-4.6	$+0.02$	$+6.1$	-0.01	$+1.5$
giugno	19.5	-0.05	-7.3	$+0.05$	$+6.6$	0.00	-0.7

R. Osservatorio Astronomico di Napoli, marzo 1936 (XIV).

Elementi intrinseci nelle varietà

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 4 aprile 1936 - XIV)

Sunto. — Si completano in forma schematica alcune precedenti Note, mostrando la convenienza di usare (nell' analisi intrinseca delle curve) elementi diversi dagli abituali, raggio di curvatura e lunghezza d' arco. Ciò delinea la possibilità di una estensione metodica ed uniforme alle varietà.

1. In alcune Note pubblicate in questi Rendiconti (cfr. anche l' altro lavoro: *Geometria completa dei trasporti in una* V_2) [1] ci siamo occupati della caratterizzazione intrinseca di curve in una varietà isotropa, a due dimensioni. Vogliamo ora mostrare come sia possibile estendere tali concetti, sì da arrivare ad equazioni intrinseche caratterizzanti le varietà immerse in altre, più naturali che non la ben nota e fondamentale relazione fra arco e curvatura per le curve piane, arco, curvatura (flessione) e torsione per le gobbe.

Non ci occupiamo qui di quanto sia dovuto al parallelismo; ammetteremo sempre di essere immersi in spazi a metrica lineare, dovuta ad una legge di distanza ed alla corrispondente metrica angolare caratterizzata da due direzioni spiccate da un punto.

2. *Elementi intrinseci delle curve piane.* Si presentano, seguendo il nostro ordine di idee, due elementi attaccati ad una curva e cioè l' elemento lineare ds, l' elemento angolare $d\sigma$; quest' ultimo corrispondendo al limite cui tende la somma degli angoli delle tangenti orientate di una poligonale circoscritta alla curva, preso ogni angolo in valore assoluto, corrispondentemente a quanto si fa per l' arco lineare. Del resto ciò è giustificato da $\frac{ds}{\rho} = d\sigma$.

L' equazione fra s e σ dà l' equazione intrinseca della curva; così come una loro espressione in funzione di un parametro t la caratterizza completamente.

Osserviamo che nel piano euclideo, in un arco di curva non presentante flessi, l' arco angolare σ è misurato dalla differenza degli angoli che le tangenti estreme formano con una retta fissa; o se si vuole, dall' angolo delle dette tangenti estreme (orientate). Ciò manca ovviamente nelle altre geometrie.

[1]) Annali Scuola Normale di Pisa, 1932.

Osserviamo ancora che se si fissa lo stesso punto come inizio del com-
to degli archi lineari e degli archi angolari, e si muta poi tale origine,
equazione intrinseca originaria della curva essendo

$$\varphi(s, \sigma) = 0$$

equazione rispetto alla nuova origine sarà

$$\varphi(s_1 + s_0, \sigma_1 + \sigma_0) = 0 ;$$

e $\varphi(s_0, \sigma_0) = 0$ è soddisfatta da s_0 e σ_0 coordinate intrinseche sulla curva
lla nuova origine rispetto alla primitiva ed s_1, σ_1 sono gli archi da questa
ntati.

Se più generalmente si ammette che le origini degli archi angolari
di quelli lineari non coincidano, si avrà:

$$\varphi(s_1 + h, \sigma_1 + k) = 0.$$

Resta così definito sulla curva un *gruppo* di traslazioni caratterizzato
al mutamento dell'origine.

Risulta particolarmente semplice il passaggio dalla curva alla sua
voluta. Dette s, σ gli elementi intrinseci della curva ed s_1, σ_1 quelli della
voluta sarà $d\sigma = d\sigma_1$; e quindi $\sigma = \sigma_1 + \sigma_0$; e per ovvie considerazioni
$= \frac{ds}{d\sigma}$; pertanto dall'equazione $\varphi(s, \sigma) = 0$ si passa a quella della evoluta
$(s, \sigma_1) = 0$ con derivazione ed eliminazione.

Se il piano non è euclideo, ma è riemanniano ad ogni curva è connessa
na curva polare (cfr. curve sferiche) di cui i punti sono i poli delle tan-
enti della prima e le tangenti le polari dei punti della prima: dall'una
ll'altra curva si passa mantenendo la stessa equazione $\varphi = 0$, salvo a
cambiare i due archi (se la sfera è di raggio unitario; altrimenti mutando s
n $\sigma_1 = \frac{s}{r}$; σ in $s_1 = \sigma . r$, r raggio della sfera.

3 *Elementi intrinseci delle curve gobbe.* Con la stesso ragionamento
i vede che ad una curva gobba sono attaccati tre elementi intrinseci fon-
amentali. Un arco lineare s; un arco angolare tangenziale, σ (corrispon-
ente a quello delle curve piane); un arco angolare φ d'osculazione, costi-
uito al limite dalla somma dei diedri dei piani osculatori passanti per
angenti prefissate della curva. La relazione con la torsione e la flessione è
mmediata, rappresentando queste ultime i rapporti fra ds e $d\sigma$; ds e $d\varphi$
rispettivamente.

Ma, ancora altri elementi intrinseci spettano ad una curva gobba; ele-
menti che si possono calcolare a partire da quelli ora detti e che servono
a stabilire il collegamento con quelli della stessa curva pensata come ap-
partenente ad una superficie.

Se noi immaginiamo assegnato, per ogni punto della curva, un piano passante per la tangente, questo piano resta fissato allorchè se ne conosca l'angolo θ (contato in un certo verso che si trasporta da punto a punto sin quando non si incontrano singolarità) con il piano osculatore: θ è funzione di s oppure se si vuole di σ, di φ.

Ma passando da un punto P della curva ad un punto P_1 il piano π forma con il piano π_1, rispettivamente attaccato a P e P_1, un certo angolo; una formazione analoga a quella che ci ha dati gli archi angolari σ e φ, permette di definire un nuovo elemento angolare φ_α (omettiamo di scrivere la esplicita espressione di φ_α in funzione degli elementi intrinseci fondamentali e della funzione α di distribuzione).

Subordinatamente rimane la stessa la rappresentazione intrinseca di una sviluppabile; vengono così collegate la curva gobba con la rigata sviluppabile dei piani osculatori.

Dualmente alla rigata passante per una curva gobba si presenta la curva tracciata su una sviluppabile; e viene ad essa attaccata la curvatura geodetica: invece di considerare i piani passanti per le tangenti con leggi assegnate, vanno considerati i punti situati lungo le rette e distribuiti con legge assegnata a partire dallo spigolo di regresso.

Viene anche ad essere collegata una lunghezza d'arco angolare collegata alla sviluppabile e che è data — sostanzialmente — dalla lunghezza d'arco angolare della curva di sviluppo di quella data, allorchè la sviluppabile si sviluppa su un piano.

4. *Elementi intrinseci delle superficie.* Qui si inizia il divario con la abituale forma della geometria intrinseca, che non stabilisce, per le superficie, una immediata ed analogica estensione di quanto si fa per le curve.

Noi potremo sulla superficie definire due tipi di elementi intrinseci. Il primo considerato come funzione additiva di campo (superficialmente inteso), il secondo considerato come funzione additiva di linea, tracciata sulla superficie.

Nel primo tipo si incontra subito la definizione di area racchiusa dalla superficie da un certo contorno; è facile ricondurre (tracciato che sia un reticolo coordinato sulla superficie) tale definizione di «elemento d'area» ai differenziali delle coordinate riferendosi come elemento d'area al triangolo racchiuso da $P, P + dP, P + \delta P$.

In modo del tutto analogo, nel secondo tipo si perviene all'espressione dell'elemento d'arco lineare. E questi sono elementi noti.

Ma, ancora per il primo tipo si presenta l'espressione $k d\omega$ che corrisponde alla porzione di superficie staccata sulla sfera unitaria dalle parallele alle normali nei punti di $d\omega$: questo porta a definire un'area angolare, di cui la formazione si può ricondurre al calcolo degli eccessi (o deficienze) sferici di tutti i triedri relativi ai vertici di un poliedro inscritto

la superficie, beninteso con tutte le limitazioni critiche che valgono per ordinaria definizione di area.

E similmente, per il secondo tipo, oltre l'arco lineare, ad una curva può attaccare l'arco angolare definito dai piani tangenti alla superficie ngo la curva stessa, oltre che tutti quelli che si definiscono per la curva bba in sè stessa.

Ci riserviamo a suo tempo il calcolo (del resto non complicato) di tutti esti elementi e la loro messa in relazione con gli abituali elementi inseci della superficie (I e II forma differenziale).

La superficie resta in tal guisa caratterizzata dalla conoscenza di due ppie (non indipendenti) di elementi intrinseci, godenti di proprietà addive rispetto al campo proprio di definizione, e cioè:

Un'area lineare (per intendere l'abituale area) ed un'area angolare ferite ad una regione e una lunghezza lineare ed una angolare, riferite l una curva.

I quattro elementi non sono indipendenti; basta assegnare una coppia essi, per avere l'altra coppia determinata; e così via.

5 *Curve tracciate su una superficie*. Da quanto precede riesce agele assegnare i caratteri intrinseci di una curva in quanto tracciata su a superficie: basta circoscrive la sviluppabile lungo la superficie stessa r ritrovare l'elemento d'arco lineare, l'elemento d'arco angolare (che no gli stessi che per la curva considerata come gobba), la curvatura geotica che in definitiva è, in ogni punto il rapporto fra elemento d'arco neare ed elemento d'arco geodetico-angolare.

6. *Conclusioni*. — Su tale impostazione sorgono problemi di applicalità più generali di quelli ordinari. Così ad esempio per le curve piane si uò chiedere (come abbiamo già indicato altrove) che una curva si riduca l un'altra — ove possibile — con una successione di « movimenti infinitemi successivi » delle singole parti; lasciando invariato o l'arco lineare e odificando quello angolare, o lasciando invariato l'arco angolare e modicando quello lineare, o modificando ambedue. Si ha in tal modo una intesazione di movimenti lungo una delle curve per passare all'altro; e due arve si possono sempre riferire l'una all'altra in tali modi. Se si vuole ne coincidano punto per punto le due lunghezze d'arco rispettive di ciauna delle due curve si ha la caratterizzazione *intrinseca* della curva a eno di un movimento (che funge da costante arbitraria rispetto all'ora etto processo di integrazione).

Naturalmente, come problema più generale si può scegliere quello deotto dall'invarianza di una certa combinazione dei due archi (lineare ed ngolari).

Problemi ed impostazioni analoghe sorgono per le curve sghembe e, lualmente, per le sviluppabili; ed ancora per le curve su una superficie.

In quanto a queste ultime sorge anche qui un problema — il ben noto — dell'applicabilità metrica di due superficie, come problemi d'integrazione di movimenti infinitesimi; ma ne sorgono degli altri, in quanto si può chiedere che i due elementi lineari e i due angolari restino invariati; ed allora la superficie è caratterizzata a meno di un movimento (che funziona ancora da costante arbitraria).

Ma si può, anche in questo caso, confrontare due superficie dal punto di vista dell'applicabilità angolare: abbandonando cioè gli elementi lineari, che potranno variare, e mantenendo quelli angolari; avendosi certamente una sottoclasse delle rappresentazioni conformi.

E similmente (ogni superficie è allora riproducibile ed applicabile su un'altra) si può abbandonare l'invarianza degli elementi lineari ed angolari.

Non delineamo, per brevità, l'ulteriore sviluppo per varietà ad un numero maggiore di dimensioni che seguirebbe, del resto, le stesse direttive.

Sui criteri di convergenza delle serie

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Aadunanza del dì 2 maggio 1936 - XIV)

Sunto. — L' A. prende in esame il caso nel quale un criterio di convergenza ›r una serie non permette di affermare nè la convergenza nè la divergenza di sa serie: e deduce la possibilità di costruire scale di criteri in altro modo che abituale.

1. È ben noto, nella teoria delle serie, come fissato un criterio di onvergenza vi siano serie che, pur convergendo, non rientrano nel campo i applicabilità di quel criterio, In altri termini, il criterio di convergenza · quello corrispettivo di divergenza) valgono purchè non si verifichi una erta condizione; e se questa invece è verificata, nulla si può dire — in base quel criterio — sulla convergenza o divergenza della serie stessa.

Così, ad esempio, limitandoci al criterio della radice per una serie (per emplicità) a termini positivi, se l' insieme $\sqrt[n]{a_n}$ delle radici n-sime dei terini n-esimi da un certo n in poi si mantiene minore (maggiore) di una uantità h minore (maggiore) dell' unità, la serie data converge (diverge); nulla si può dire invece se h risultasse eguale all' unità.

Si completa il criterio isolato di convergenza, inserendolo in una scala i criteri di convergenza; ed è ben noto altresì che questo procedimento di ostruzione di scale di criteri é un procedimento transfinito che conduce . transfiniti non numerabili.

2. Ma, oltre i soliti procedimenti per costruire scale di criteri, ve ne : un altro che qui vogliamo esporre. Esso richiama nella sua formazione l procedimento che abbiamo altrove [1] indicato per l'estensione del processo i limite; e permette di costruire — partendo da un criterio assegnato — cale di criteri di convergenza ciascuno da applicare quando il suo precelente nella scala (e quindi tutti i precedenti) cadono in difetto.

Beninteso, il fatto di applicare non implica la validità: non obbliga cioè ı dover riconoscere con esso se la data serie converga o diverga; si ripresenta lo stesso fatto che si ha nella ordinaria costruzione di scale di criteri.

3. Per brevità ci limitiamo a mostrare quale sia il processo di costru-

---

[1]) Cfr. questo Rendiconto, anno 1935; ed anche *« Limite e pseudo-limite di una successione »* Rend. R. Acc. Lincei. Roma, 1930.

zione di queste scale nel caso più semplice del criterio della radice; l'estensione agli altri criteri risultando del tutto parallela.

Si abbia perciò una serie numerica a termini positivi

$$S \equiv + a_1 + a_2 + \dots$$

e si formi con i suoi termini l'insieme

$$I \equiv \left[\sqrt[n]{a_n} \right].$$

Se il massimo limite L di questo insieme è una quantità minore dell'unità, la serie converge; se è una quantità maggiore dell'unità, la serie diverge. Resta il caso di non applicabilità del criterio, $L = 1$.

Essendo $L = 1$ il massimo limite di I, consideriamo i punti di I racchiusi nell'intervallo $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$: sieno $I(\varepsilon)$ questa porzione. Essa sarà formata di valori $\sqrt[n]{a_n}$ corrispondenti ad una certa successione di indici $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$

I restanti indici (e quindi i restanti termini della serie) sono I°) un numero *certamente* finito per i quali $\sqrt[n]{a_n} > 1 + \varepsilon$; II°) un numero finito o infinito di termini per i quali $\sqrt[n]{a_n} < 1 - \varepsilon$. La I è chiara perchè se così non fosse vi sarebbe un punto limite maggiore o eguale ad $1 + \varepsilon$ contrariamente all'ipotesi fatta che $L = 1$ sia il massimo limite.

Il primo gruppo di termini consti di quelli relativi a certi indici $p_1, p_2, \dots p_p$; il secondo gruppo di termini di quelli relativi a certi indici $m_1, m_2, \dots$, con la condizione che gli indici m, n, p nel loro complesso dànno la successione completa dei naturali 0, 1, 2, ... senza ripetizioni e senza eccezioni, non potendo nessuno degli m, n, p coincidere con quelli di un altro gruppo.

4. In corrispondenza di questo spezzamento degli indici in tre gruppi la serie data si può considerare come somma di tre altre serie: la prima formata conservando i soli termini con gli indici m e ponendo zero al posto di quelli con indici n oppure p; la seconda facendo lo stesso con i termini in n; la terza con i termini in p.

Se la serie data converge, convergeranno tutte e tre queste serie; ma la prima, per la stessa sua costruzione converge sempre, e così anche la terza: dunque dovrà convergere la seconda; e reciprocamente se la seconda converge, dovrà necessariamente convergere la data. Che la prima converga sempre, si deduce dal fatto che — per i termini non ridotti a zero — $\sqrt[n]{|a_n|} < 1 - \varepsilon$; per la terza che essa consta di un numero *finito* di termini non nulli.

D' altro canto la seconda si presenta come avente certi termini non ...i e certi altri nulli; ed essa convergerà o divergerà assieme alla serie ...nata sopprimendo semplicemente i termini che sono stati ridotti a zero. Se essa dunque è

$$0 + \ldots + 0 + a_{n_1} + 0 + \ldots + 0 + a_{n_2} + 0 + \ldots$$

...terà esaminare la serie

$$S' \equiv b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$$

$$b_s = a_{n_s} .$$

La convergenza o divergenza di questa, implicherà la convergenza o ...ergenza della serie data.

5. Riapplicando il criterio della radice, occorre formare adesso l'in...ne

$$I' \equiv \left[\sqrt[s]{b_s} \right] :$$

...è l'insieme

$$I' \equiv \left[\sqrt[s]{a_{n_s}} \right]$$

...ece dell'insieme

$$I(\varepsilon) = \left[\sqrt[n_s]{a_{n_s}} \right] ;$$

ovviamente i punti di I' sono ricavati da quelli di $I(\varepsilon)$ mediante la

$$\sqrt[s]{a_{n_s}} = \left(\sqrt[n_s]{a_{n_s}} \right)^{\frac{n_s}{s}} \qquad n_s \geq s .$$

Potrebbe quindi benissimo accadere che il limite superiore L' di I' ri...ti minore (maggiore) di 1, mentre L risultava eguale ad 1; e quindi si ... un secondo gradino della scala dei criteri. Se nemmeno con esso si de...mina la eventuale convergenza o divergenza, si iteri il procedimento, ...ssando così ad un terzo scalino.

Che effettivamente vi sieno serie che sono via via caratterizzabili ri...etto alla scala stessa, bastano a mostrarlo i seguenti esempi.

I. Criterio della scala: applicabile alla serie geometrica Σh^r ($h < 1$).

II. Criterio della scala: applicabile alla serie ottenuta da questa sopmendo i termini di posti $a, a^2, a^3, \ldots$ e sostituendoli con $k, k^2, k^3, \ldots$ ...vece di $h^a ; h^{a^2} ; h^{a^3} ; \ldots$).

III. Criterio della scala: riapplicando a questi nuovi termini lo stesso procedimento e così via.

6. Osserviamo intanto (e ciò giustifica quanto abbiamo detto in principio circa la relazione con l'altra nota) che *deve necessariamente* essere l'insieme:

$$\Pi \left[\frac{n_s}{s} \right]$$

non limitato. Perchè se così fosse, ci ritroveremmo certamente nelle condizioni della prima serie.

Questo implica che la frequenza della successione degli n_s deve essere nulla riferita alla successione dei numeri naturali. Ed ove si iteri l'operazione per avere il secondo gradino della scala dei criteri, la nuova successione dovrà anche essa essere di frequenza nulla rispetto a quella ora trovata, e così via: giustificandosi ulteriormente in tal modo l'analogia di formazione con il concetto di pseudo-limite (v. nota citata).

Notiamo anche che, al diminuire di ε, l'insieme degli indici m si arricchisce di nuovi termini; l'insieme degli indici p fa lo stesso, mentre l'insieme degli indici n, ne perderà alcuni (salvo che non restino invariati).

Pertanto, oltre la scala formata dai successivi stadi di iterazione del procedimento, ve ne potrebbe essere un'altra formata dall'esame del comportamento delle tre serie parziali al variare di ε.

SULL'ATTRAZIONE MATRIMONIALE PER STATO CIVILE IN ITALIA

Nota del dott. **G. de Meo**, *presentata dal socio ord.* **R. Marcolongo**

(Adunanza del dì 2 maggio 1936 - XIV)

Sunto. — In base ai più usati indici per lo studio dell' attrazione matrimoniale, iene studiata l'attrazione per stato civile nei vari Compartimenti e nel Regno egli anni 1866, 1871, 1876, ... 1926. Si analizzano le circostanze che influiscono ulla variabilità degli indici calcolati e si prospetta una ipotesi di un possibile muamento attraverso il tempo del senso di simpatia degli sposi simili.

I.

1. Un matrimonio è detto *endogeno* quando gli sposi presentano enrambi il medesimo carattere considerato (per es. nel caso di nazionalità, ! matrimonio di un italiano con un' italiana; nel caso di stato civile, il ıatrimonio di un celibe con una nubile, etc.). È detto *esogeno*, quando avıiene il contrario. Se il carattere considerato presenta due sole modalità ·a i M e due sole fra le F, è possibile costruire una tabella a doppia en·rata detta a classificazione *dicotoma*, come la seguente:

TABELLA I.

M \ F	A'_1	A'_2	Totali
A_1	e_{11}	e_{12}	$e_{11}+e_{12}$
A_2	e_{21}	e_{22}	$e_{21}+e_{22}$
	$e_{11}+e_{21}$	$e_{12}+e_{22}$	$N=e_{11}+e_{12}+e_{21}+$ $+e_{22}$

Fra i M il carattere può presentare le modalità A_1 e A_2 e fra le F le corrispondenti modalità A'_1 e A'_2. Le coppie *endogene* saranno perciò in numero $e_{11}+e_{22}$; mentre le coppie *esogene* saranno in numero $e_{12}+e_{21}$.

Primo fra tutti il BENINI [1]) propose il calcolo di un *indice di attrazione*.

[1]) R. BENINI, *Principii di Demografia*, Firenze, 1901. Fra gli statistici che si occuparono diffusamente di questo argomento va ricordato specialmente il SAVORGNAN che vi ha dedicato parecchi studi e ricerche.

Il suo metodo, consiste essenzialmente nel confronto di questa tabella (Tab. I) contenente i dati effettivamente rilevati con un' altra Tabella che contiene invece i numeri di coppie e che si otterrebbero se le combinazioni matrimoniali avvenissero a caso. Se, infatti, non vi fosse alcuna speciale preferenza o repulsione fra i M A_1 e le F A'_1, la probabilità della formazione di una coppia *endogena* $A_1 - A'_1$, sarebbe, in base al teorema delle probabilità composte:

$$\frac{e_{11}+e_{12}}{N} \cdot \frac{e_{11}+e_{21}}{N} \quad [1]$$

La prima frazione indica infatti la probabilità di trovare, nella massa delle N coppie, un maschio presentante il carattere A_1; mentre la seconda indica l' analoga probabilità di trovare nella massa stessa una F col carattere A'_1. Il *numero probabile* c_{11} di coppie endogene, sarà dato allora dall' espressione [1], moltiplicata per N, cioè da:

$$c_{11} = \frac{(e_{11}+e_{12})(e_{11}+e_{21})}{N}. \quad [1']$$

Eseguendo, sui numeri contenuti nella Tab. I le quattro operazioni analoghe a quella indicata, si ottiene la seguente Tabella che potremmo chiamare « distribuzione casuale » [1]).

TABELLA II.

M \ F	A'$_1$	A'$_2$	Totali
A$_1$	c_{11}	c_{12}	$c_{11}+c_{12}$
A$_2$	c_{21}	c_{22}	$c_{21}+c_{22}$
	$c_{11}+c_{21}$	$c_{12}+c_{22}$	$N=c_{11}+c_{12}+c_{21}+ + c_{22}$

Se, infine, i matrimonii della Tabella I si fossero celebrati in modo da risultare addirittura egualmente numerosi per ogni coppia di modalità, avremmo ottenuto una distribuzione che potremmo chiamare « indifferente »,

---

[1]) Ci serviamo di denominazioni o notazioni già usate in: G. DE MEO, *Su di alcuni indici atti a misurare l' attrazione matrimoniale in classificazioni dicotome*, « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche », Napoli, Serie IV, Vol. IV, 1934

lla quale i numeri di coppie contenuti nei quattro quadranti risultereb-ro tutti eguali a 1/4 N [1]).

L' indice di BENINI, con le notazioni ora dette, è dato da:

$$I = \frac{e_{11} - c_{11}}{M_s - c_{11}} \qquad [2]$$

endo indicato con M_s il massimo numero di coppie endogene che, in seno la massa, possono formarsi [2]). L' indice, che può variare fra 0 ed 1, dà la misura di quel complesso di cause o forze che intervengono nella scelta; poichè il variare nel tempo e nello spazio delle proporzioni numeriche gli individui A_1, A_2, A'_1, A'_2 sulla massa totale N costituisce in generale allargarsi o un restringersi del campo di scelta, ne segue che, come ce notare il GINI [3]), l' indice stesso non è indipendente dal rapporto nu-erico tra gli individui delle due popolazioni poste a fronte.

Il BENINI stesso consigliò inoltre [4]) di calcolare gli indici di attrazione ltanto su quei matrimoni facenti parte della massa N nei quali la scelta iò essere libera, e cioè non vincolata dalle diversità dei numeri di $M A_1$

---

[1]) La distribuzione « indifferente », non è altro che la « equa ripartizione » l BENINI. Cfr. BENINI, *Gruppi chiusi e gruppi aperti in alcuni fatti collettivi di combinazioni*, in: « Buletin de l' Institut International de Statistique », t. XXIII, 2.éme vraison, Cairo 1928, pag. 370.

[2]) In Italia, nel 1912, per ogni 1000 matrimoni, si ebbero:

M \ F	Nubili	Vedove	Totale
Celibi	882.21	20.36	902.57
Vedovi	65.50	31.93	97.43
Totale	947.71	52.29	1.000.00

oichè i celibi erano in tutto 902.57 mentre le nubili furono 947.71, è evidente ne il numero massimo di coppie celibi-nubili che avrebbero potuto formarsi, fu di 02.57. Analogamente, il numero massimo di coppie vedovi-vedove fu di 52.29.

[3]) Cfr. C. GINI e L. DE BERNARDINIS, *Sulle vaccinazioni antitifiche nell' esercito aliano durante la guerra*, « Metron », Vol. III, n. 3-4, p. 373, nel quale la parte netodologica è dovuta al GINI.

[4]) R. BENINI, *Gruppi chiusi e gruppi aperti* etc., cit. Nel caso esemplificato nella ıella nota 2, se le nubili (947.71) avessero anzitutto sposato tutti i celibi disponibili (902.57), di esse, 42.14 sarebbero state costrette a sposare vedovi, dando uogo ad un primo gruppo di combinazioni obbligate. Se invece le nubili non avessero posato che vedovi (97.43) il rimanente di queste non avrebbero potuto sposare he celibi, dando luogo ad un secondo gruppo di combinazioni obbligate. Detraendo

rispetto alle $F\,A'_1$ e dei $M\,A_2$ rispetto alle $F\,A'_2$. Un quadro dicotomico di *gruppi aperti* presenta perciò la caratteristica che:

$$(e_{11}+e_{21})=(e_{12}+e_{22})=(e_{11}+e_{12})=(e_{21}+e_{22})=\frac{1}{2}\,N$$

2. Successivamente il GINI [1]), quale misura della rassomiglianza tra le modalità qualitative di due caratteri, propose di calcolare un *indice di rassomiglianza* s la cui formola, in base alle notazioni delle Tabelle I e II, è data da:

$$s=\frac{e_{11}-c_{11}}{(e_{11}+e_{21})\cdot(e_{12}+e_{22})\cdot(e_{11}+e_{12})\cdot(e_{21}+e_{22})}. \qquad [3]$$

Questo indice fornisce bensì una misura della rassomiglianza fra gli sposi, ma non, come quello del BENINI, della simpatia fra sposi simili, e quindi esso vuole ritrarre uno stato di fatto, non una tentenza. s è sempre minore dell' indice del BENINI e quando questo diventa $+1$ o -1 segnando perciò omogamia o eterogamia perfetta, s assume un valore minore e segna omogamia o eterogamia imperfetta [2]).

3. Tralasciando di accennare ad altri procedimenti usati per lo studio dell' attrazione o in generale per le associazioni di alcuni caratteri [3]), ricordiamo brevemente un metodo di recente proposto dall' ANDREOLI [4]) per la misura dell' omogamia. Ecco in che cosa consiste questo metodo. Si calcola:

$$\omega=\frac{D_e}{N} \qquad [4]$$

---

dalla tabella in questione queste combinazioni obbligate, si ottiene la seguente tabella di gruppi aperti:

	nubili	vedove	totale
celibi	31.93	20.36	52.29
vedovi	20.36	31.93	52.29
totale	52.29	52.29	104.58

[1]) C. GINI, *Indici di omofilia e di rassomiglianza e loro relazioni col coefficiente di correlazione e con gli indici di attrazione.* Atti R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 1914-15, t. LXXIV, parte II.

[2]) Cfr. F. SAVORGNAN, *La misura dell' endogamia e della omogamia*, cit.

[3]) Cfr. ad es. YULE, *On the association of attributes in statistics*, « Phil. Trans. Roy. Soc. », vol. 194, 1900 p. 257; *On the methods of measuring association between two attributes*, Journ. Roy. Stat. Soc., Maggio 1912, pag. 585.

[4]) G. ANDREOLI, *Sulla definizione di certi indici relativi a caratteri di omogamia in problemi statistici*, Rend. R. Acc. Scienze Fis. e Mat. di Napoli, Adunanza 10-2-1931.

cui $D_e = (e_{11} + e_{12}) - (e_{21} + e_{12})$ ossia è la somma delle frequenze poste
lla diagonale sinistra-destra diminuita delle frequenze poste sulla diago-
le destra-sinistra. ω può essere assunto come un *indice di omogamia*,
ta ad indicare di quanto la distribuzione « effettiva » si allontana dalla
stribuzione « indifferente », ossia ci dice qual' è, sul totale delle coppie
nsiderate, l' eccedenza di coppie *endogene* sulle *esogene*, assumendo va-
e 0 quando questa eccedenza è nulla (caso della distribuzione indifferente)
il valore $+1$ quando invece tutte le frequenze si addensano sulla dia-
nale sinistra-destra. ω assume valore -1 quando tutte le frequenze ca-
no sulla diagonale destra-sinistra. Esso, come l' indice di rassomiglianza
l GINI, più che ritrarre la simpatia degli sposi simili, darebbe prevalen-
mente l' idea di uno stato di fatto [1].

II.

4. Esaminati così brevemente alcuni degli indici che possono usarsi
r lo studio dell' attrazione matrimoniale, veniamo ora a considerare i
atrimoni celebrati in Italia da poco dopo la costituzione del Regno in poi
lativamente allo stato civile anteriore alle nozze.

Nella Tabella III sono contenuti i valori di I calcolati in base alla [2].
aminando questa Tabella si desume che l' attrazione I:

a) rimane quasi *stazionaria* in Piemonte;

b) decresce in Liguria, Lombardia, Veneto, Emilia, approssimativa-
ente come da 100 a 80;

c) cresce approssimativamente come da 100 a 150 in Toscana, Marche,
mbria, Lazio, Abruzzi, Sardegna ed in misura ancora maggiore in Cam-
nia, Puglia, Lucania, Calabria, Sicilia e nel complesso del Regno.

Nella Tabella IV sono riportati i valori di s calcolati in base alla [3]
e seguono abbastanza bene l' andamento degli I. Nella Tabella V sono poi
portati i valori di ω ottenuti in base alla [4], ed infine nella Tabella VI
no contenute le frequenze relative delle vedove nei matrimoni.

I dati delle Tabelle III-IV-V-VI sono riportati sul grafico I che mette
ne in mostra l' andamento complessivo dei vari indici attraverso il tempo
nei vari compartimenti. Uno sguardo a questo grafico ci convince delle
tevoli differenze esistenti fra i valori di ciascun indice in ogni Comparti-
ento e nel corso degli anni: ma prima di cercare di interpetrare siffatte
fferenze, conviene in primo luogo fare alcune considerazioni.

---

[1]) Si definisce inoltre (G. ANDREOLI, lavoro cit.) *indice di sfasamento* il valore
$= D_e - D_c$, in cui D_e è l' operazione D esegnita sulla distribuzione effettiva e D_c
stessa operazione eseguita su quella casuale. L' *indice di irregolarità* è dato invece
$j = D_c - D_i$ e sta ad indicare di quanto la distribuzione casuale si allontana da
ella indifferente. Il valore di ω, oltre che dalla [1] è dato da $w = \varphi + j$.

5. Conviene innanzi tutto domandarsi in quanta parte le diversità degli indici possono attribuirsi alla diversa intensità del « senso di simpatia » reciproca degli sposi simili, ed in quanta parte tali diversità sono il portato di mutate circostanze ambientali. Non è facile, come si comprende rispondere a questo quesito. Certo è però, che sul valore degli indici, hanno dovuto indubbiamente agire le seguenti circostanze di fatto:

1.° variabilità nel tempo e nello spazio della frequenza dei vedovi nei matrimoni;

2.° errori dei dati grezzi.

Esaminiamo in qual modo queste due circostanze hanno potuto influire nel senso da noi accennato.

6. *Frequenza relativa dei vedovi.* Dal grafico I si desume che la frequenza delle vedove va diminuendo fortemente attraverso il tempo ed un andamento analogo si rileverebbe per i vedovi: solo nell'anno 1916, per l'influenza della guerra, la frequenza delle vedove si innalza subitamente. Inoltre si nota che la discesa è stata più rapida in quelle Regioni, quasi tutte dell'Italia Meridionale, nelle quali la frequenza iniziale era molto elevata.

La sempre minor frequenza dei vedovi nei matrimonii deve evidentemente ricollegarsi al declinare della mortalità generale che tende a far allungare la durata media del matrimonio [1]), dal chè consegue che si tende, attraverso il tempo, a divenire vedovi ad un'età sempre più inoltrata nella quale più difficilmente si passa a nuove nozze determinando in definitiva una minore nuzialità di vedovi.

Orbene, quando sul mercato matrimoniale sono presenti molti vedovi in età non troppo avanzata, molti di essi sono costretti a passare a nuove nozze: nella scelta che ne segue, il requisito, nella sposa, del medesimo stato civile dello sposo, passa in seconda linea rispetto a quello dell'età, e perciò numerose si formano le coppie eterogame. Quando, viceversa, si diventa vedovi ad un'età più avanzata, o non si contrae un nuovo vincolo, determinando così una minor frequenza di vedovi nei matrimoni celebrati, ovvero nel riammogliarsi, si decampa più difficilmente dalla propria classe d'età [2]) e perciò anche dal proprio stato civile [3]).

---

[1]) Cfr. M. Imperatori, *Sulla durata media del matrimonio in base alle tavole di mortalità della popolazione italiana*, in: « Notiziario Demografico » 10-3-1934; *Durata media della coesistenza di due individui di sesso diverso*, in « Notiziario Demografico » 10-7-1935; *Durata media del matrimonio secondo le tavole di mortalità*, in « Notiziario Demografico » 10-6-1934.

[2]) Cfr. R. Benini, *Principi di Demografia* cit., pag. 138.

[3]) È bene osservare che la frequenza dei vedovi nella popolaziome muta attraverso il tempo molto meno della frequenza dei vedovi che passano a nuove nozze.

Indici di attrazione dei matrimoni classificati per stato civile degli sposi

(Valori di I)

Compartimenti	1866	1871	1876	1881	1886	1891	1896	1901	1906	1911	1916	1921	1926
1. **Piemonte**	44,25	41,33	49,69	47,89	46,21	48,09	52,06	49,83	48,73	48,98	45,15	40,70	44,66
2. **Liguria**	41,79	26,69	31,97	34,15	31,94	31,67	26,33	31,12	29,21	25,37	29,69	37,51	33,13
3. **Lombardia**	46,38	44,31	50,40	48,49	47,58	49,25	49,00	47,73	44,76	47,08	44,08	37,40	42,42
4. **Veneto**	—	56,32	54,79	56,58	54,16	55,24	52,48	51,25	52,53	53,60	43,91	46,18	45,56
5. **Emilia**	59,64	59,92	61,63	59,38	58,06	59,44	61,88	59,59	57,27	56,99	49,73	51,68	46,42
6. **Toscana**	35,63	39,51	45,27	48,08	46,13	49,00	48,81	48,71	46,52	54,71	43,70	51,58	53,29
7. **Marche**	37,22	25,70	41,81	38,36	38,22	43,09	40,12	40,01	44,32	56,16	41,52	48,83	54,23
8. **Umbria**	29,59	32,07	25,71	27,40	30,38	34,40	29,35	35,71	40,97	42,98	33,75	49,96	45,31
9. **Lazio**	—	—	33,10	26,85	27,73	28,57	22,93	29,88	32,34	29,54	30,74	42,90	42,88
10. **Abruzzi**	52,79	47,47	52,35	53,45	55,12	56,64	57,68	57,81	67,48	72,07	78,47	60,28	70,83
11. **Campania**	32,38	31,85	35,69	38,85	40,82	47,05	50,85	50,99	56,09	60,39	61,14	52,94	59,33
12. **Puglie**	43,31	38,18	43,55	43,09	51,88	50,75	53,76	53,67	58,48	66,60	66,85	57,92	69,68
13. **Basilicata**	39,82	43,18	49,89	48,70	57,70	55,30	65,93	66,31	67,79	77,49	82,11	64,43	75,03
14. **Calabria**	27,83	26,86	27,36	31,51	34,50	43,11	45,77	48,11	53,12	61,42	60,10	45,36	59,97
15. **Sicilia**	27,40	29,58	32,68	33,38	35,00	37,60	40,36	45,42	50,02	60,61	63,13	55,70	64,11
16. **Sardegna**	35,31	37,18	38,76	42,63	45,00	41,28	39,40	38,85	43,80	43,30	46,14	49,70	49,36
Regno	**40,29**	**39,24**	**43 76**	**43,31**	**44,66**	**47,36**	**48,76**	**49,35**	**52,11**	**56,79**	**54,95**	**50,29**	**54,43**

TABELLA IV

Indici di rassomiglianza dei matrimoni classificati per stato civile degli sposi

(Valori di s).

Compartimenti	1866	1871	1876	1881	1886	1891	1896	1901	1906	1911	1916	1921	1926
1. **Piemonte**	25,80	25,23	31,92	31,62	29,60	31,41	32,67	31,59	32,26	32,80	31,24	29,19	31,17
2. **Liguria**	21,92	15,77	19,87	21,45	19,49	19,44	20,84	19,32	19,86	17,81	24,20	26,77	23,72
3. **Lombardia**	27,27	28,53	34,20	33,13	31,29	33,27	33,70	33,13	31,92	33,98	33,78	29,72	31,55
4. **Veneto**	—	37,32	37,97	38,62	33,54	33,87	34,01	31,24	31,61	32,69	29,68	28.88	31,16
5. **Emilia**	36,56	36,14	40,23	37,44	36,29	38,24	39,52	39,05	36,30	37,79	36,79	33,77	30,20
6. **Toscana**	20,84	23,20	28,77	30,15	29,29	32,94	31,15	31,58	31,91	37,66	33,12	34,38	35,87
7. **Marche**	18,36	14,50	23,35	19,73	20,63	23,96	22,14	25,95	26,57	33,58	26,54	27,82	30,91
8. **Umbria**	19,82	19,10	15,80	19,00	18,76	22,02	18,74	25,59	25,90	29,04	25,69	32,61	29,24
9. **Lazio**	—	—	26,70	22,52	24,40	24,10	18,61	25,47	27,44	23,87	25,27	32,11	33,88
10. **Abruzzi**	40,75	37,40	41,61	42,30	40,42	43,20	42,62	38,93	50,30	50,33	52,83	44,92	46,53
11. **Campania**	24,74	26,78	30,32	32,77	33,38	38,56	41,54	40,83	43,98	45,48	46,98	42,42	42,38
12. **Puglie**	35,41	33.66	36,22	37.45	38,20	41,48	44.22	43,36	50,07	53,13	51,36	49,41	52,79
13. **Basilicata**	36,03	38,49	43,75	42,71	45,56	45,41	52,42	52,45	55,71	54,86	59,54	55,26	51,70
14. **Calabria**	23,68	22.32	22,50	27,54	28,62	33,56	35,54	35,09	35,70	39,19	35.90	32,64	36,05
15. **Sicilia**	21,50	26,94	27,32	28,54	27,41	29,71	31,57	36,08	38,47	43.69	46,69	44,56	47,71
16. **Sardegna**	26,07	25,84	28,81	31,02	35,67	30,83	32,29	30,39	34,48	32,02	34.68	39,19	37,39
Regno	**27,83**	**28,44**	**32,29**	**32,39**	**31,79**	**34,51**	**35,49**	**35,67**	**38,12**	**40,38**	**40,60**	**37,69**	**38,52**

Indici di omogamia dei matrimoni classificati per stato civile degli sposi

(*Valori di* ω)

Compartimenti	1866	1871	1876	1881	1886	1891	1896	1901	1906	1911	1916	1921	1926
1. **Piemonte**	69,46	70,45	74,17	74,35	74,84	75,66	77,70	81,58	83,58	84,39	70,55	86.79	86,80
2. **Liguria**	72,83	75,52	74,79	75,15	75,24	76,70	81,28	77,85	81,47	81,34	74,67	84,90	84,45
3. **Lombardia**	67,81	72,15	73,73	75,41	75,56	77,82	80,19	82,84	84,21	85,86	72,35	86,66	87,10
4. **Veneto**	—	78,43	78,11	80,70	81,22	83,31	84,78	84,73	86,82	88,17	78,30	87,32	87,59
5. **Emilia**	73,17	77,90	79,56	79,77	80,48	82,03	83,12	85,26	86,83	88,39	82,89	89,24	88,72
6. **Toscana**	71,27	76,24	76,66	77,58	80,33	80,68	81,17	83,62	85,76	86,94	74,25	87,39	87,11
7. **Marche**	70,42	78,69	81,42	80,54	82,02	81,51	81,56	82,27	86,64	85,55	65,49	86,18	84,60
8. **Umbria**	69,51	79,33	77,96	79,80	81,48	80,02	80,90	83,48	84,94	85,25	69,48	86,52	85,05
9. **Lazio**	—	—	76,39	74,49	77,95	78,32	77,32	81,14	84,38	84,12	75,76	84.62	83,06
10. **Abruzzi**	71,29	76,54	77,10	76,62	77,02	76,55	77,69	79,17	82,12	80,26	62,00	83,18	82,31
11. **Campania**	67,72	73,75	72,63	72,78	73,74	74,69	76,57	77,63	79,96	78,48	68,52	81.62	80,93
12. **Puglie**	66,18	71,54	72,62	76,57	73,37	74,48	75,87	75,59	80,93	81,03	71,03	80,52	88,85
13. **Basilicata**	66,65	71,08	73,36	74,10	72,96	73,52	76,47	77,96	79,90	78,56	64,91	83,86	83,12
14. **Calabria**	66,01	71,46	67,46	73,54	74,33	74,28	75,35	75,67	77,11	78,49	61,53	81,46	81,80
15. **Sicilia**	65,71	70,09	73,55	74.65	74,82	73,87	75,24	78,88	79,76	78,73	64,75	81,29	83,12
16. **Sardegna**	63,10	65,99	69,02	70,60	73,56	71,48	70,87	73,82	75,80	73.88	72,05	74,18	77,99
Regno	**68,72**	**73,55**	**74.80**	**75,92**	**76,59**	**77,38**	**78,87**	**80,85**	**82,93**	**83,34**	**71,80**	**84,89**	**84,86**

TABELLA VI

Frequenza delle vedove nei matrimoni

(cifre relative a 1000 spose).

Compartimenti	1866	1871	1876	1881	1886	1891	1896	1901	1906	1911	1916	1921	1926
1. **Piemonte**	58,56	60,42	61,72	63,10	57,17	58,51	50,26	40,44	38,82	37,78	79,77	32,44	32,37
2. **Liguria**	41,58	41,16	48,63	49,11	45,38	43,17	48,51	41,24	39,07	40,02	74,20	36,41	36,79
3. **Lombardia**	65,14	64,11	70,87	64,59	59,08	56,92	51,77	44,21	41,12	38,15	88,27	38,88	35,63
4. **Veneto**	—	57,69	62,30	53,21	41,16	40,23	35,13	30,95	26,07	23,99	52,70	25,31	29,26
5. **Emilia**	64,70	49,22	54,46	48,57	45,80	44,92	41,50	37,72	30,60	29,08	51,65	24,84	24,74
6. **Toscana**	51,47	43,14	52,61	48,55	42,93	47,44	42,44	36,55	34,38	34,98	79,05	30,22	31,99
7. **Marche**	40,31	32,17	30,63	26,36	26,35	30,01	29,92	32,12	24,88	29,67	79,41	23,44	27,42
8. **Umbria**	66,52	35,94	89,48	43,41	33,67	39,45	36,74	39,49	30,04	34,09	86,43	30,30	32,12
9. **Lazio**	—	—	70,60	75,25	69,28	64,49	60,75	57,11	47,84	43,72	72,33	42,44	51,65
10. **Abruzzi**	105,99	80,39	85,31	88,21	74,98	84,57	76,81	73,94	69,42	70,37	167,60	58,37	52,29
11. **Campania**	91,68	83,17	93,75	96,03	89,70	93,59	90,85	82,26	75,65	79,69	135,37	67,40	60,73
12. **Puglie**	125,33	108,09	102,02	90,97	86,82	100,17	100,00	97,95	90,08	88,60	135,93	91,04	77,03
13. **Basilicata**	140,08	121,66	120,19	113,87	112,75	114,31	111,89	103,44	104,11	88,17	209,60	84,45	59,09
14. **Calabria**	108,36	84,26	97,86	88,37	81,55	81,58	80,34	72,52	60,80	54,49	95,93	50,20	39,91
15. **Sicilia**	96,83	105,91	84,48	83,33	73,91	80,33	77,00	70,16	66,44	71,21	148,76	72,31	62,11
16. **Sardegna**	105,75	87,35	89,72	84,92	90,33	92,00	99,53	80,69	79,63	76,85	88,39	93,13	90,85
Regno	**80,98**	**71,76**	**73,24**	**71,25**	**63,74**	**66,11**	**62,05**	**54,95**	**51,21**	**49,94**	**97,21**	**45,98**	**43,18**

Le circostanze su esposte spiegherebbero in parte [1]) l'aumento attra-
rso il tempo in tutti i Compartimenti degli indici di omogamia, cosa che
rebbe ad indicare che i matrimonii tendono a divenire sempre più omo-
nei per riguardo allo stato civile degli sposi. Anche l'aumento nella mag-
r parte dei Compartimenti degli indici I, potrebbe ricollegarsi con l'au-
nto dell'età media dei vedovi che rende più difficile la contrazione di
nuovo vincolo matrimoniale specialmente con una nubile.

7. *Errori nei dati grezzi.* È noto che specie in alcuni Compartimenti
'Italia era un tempo notevolmente diffusa la consuetudine di celebrare il
atrimonio col solo rito religioso; tale costumanza è andata sempre più
ievolendosi attraverso il tempo, per scomparire del tutto dopo l'entrata
vigore dei Patti Lateranensi [2]).

Orbene, negli anni più prossimi alla costituzione del Regno, ed in ispe-
al modo in alcuni Compartimenti, può darsi che per l'accennata circo-
anza le combinazioni eterogame *Ci-Ve* e *Vi-Ni* fossero artificialmente
cresciute in danno della combinazione omogama *Vi-Ve* appunto perchè
vevano presentarsi al matrimonio donne e uomini solo legalmente nubili
celibi. La medesima ipotesi potrebbe estendersi al caso che entrambi gli
osi erano vedovi ed all'atto del matrimonio venivano classificati come
-Ni. Ma un siffatto errore, molto meno probabile del precedente, avrebbe
cresciuto la combinazione *Ci-Ni* di quanto avrebbe diminuito la combi-
zione *Vi-Ve*, — senza, però, produrre nessuna influenza sull'indice di
nogamia e sull'indice di attrazione calcolato sui gruppi aperti [3]).

Riassumendo, lo scomparire graduale dell'errore segnalato nei dati

---

[1]) Si potrebbe osservare che agendo la mortalità con intensità pressocchè eguale
i due sessi, in ogni momento, nella popolazione, non è molto diverso il numero
i vedovi e quello delle vedove e perciò i giovani vedovi potrebbero sempre trovare
sposare vedove anch'esse giovani. Sta di fatto, però, che per un complesso di
gioni e pregiudizii le vedove si riammogliano con minor frequenza dei vedovi — e
ando questi sono in media più giovani, tenderebbero a decampare più facilmente
lle vedove, trovando molte donne nubili ed altrettanto giovani disposte a sposarli.

[2]) Cfr. ISTITUTO CENTRALE DI STATISTICA DEL REGNO, *Movimento della popo-
zione secondo gli atti dello Stato Civile*, anno 1925.

[3]) In base alla [4]

$$\omega = \frac{(e_{11} + e_{22}) - (e_{21} + e_{12})}{N}$$

vede immediatamente che se e_{11} cresce di quanto diminuisce e_{22} o viceversa il
alore di ω rimane immutato.

Nel caso dei gruppi aperti, inoltre, l'indice di attrazione è uguale ad ω. (Cfr.
. DE MEO, *Su di alcuni indici atti a misurare etc.*, cit.).

grezzi, ha certamente influito sull'aumento che attraverso il tempo, in generale subiscono gli iudici ω ed I. Una conferma di ciò potrebbe ravvisarsi nel fatto che in alcuni Compartimenti facenti parte dell'ex Stato Pontificio (Marche, Umbria, Lazio), gli indici calcolati assumono valori particolarmente bassi all'inizio del periodo considerato, che è molto prossimo all'epoca nella quale veniva praticato il solo rito religioso.

8. Segnalate così le circostanze di fatto che influiscono sul valore degli indici, attraverso il tempo, a parte le possibili variazioni del « senso di simpatia » degli sposi, — possiamo cercare di interpretare l'andamento degli indici stessi per qualcuno dei Compartimenti.

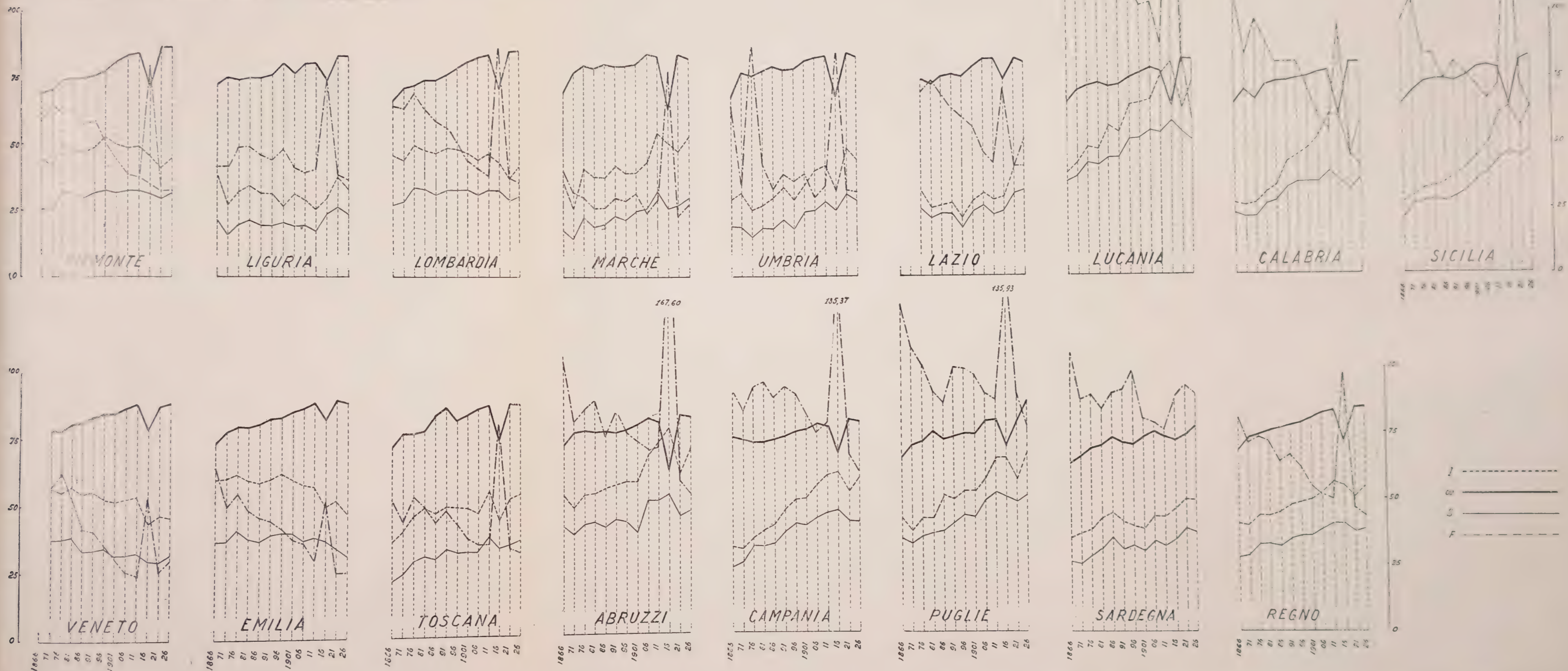
Ricordiamo innanzi tutto che l'attrazione misurata da I ha una leggera tendenza alla diminuzione in Piemonte, Lombardia, Veneto ed Emilia, malgrado che l'omogamia ha una marcata tendenza all'aumento (V. Grafico I). Caratteristico, d'altra parte, è l'andamento quasi stazionario degli indici per la Liguria che però presenta attrazione bassissima per tutto il periodo considerato.

Orbene, senza menomamente aver la pretesa di dare un'esauriente spiegazione di questo andamento degli indici sui cui valori agiscono in senso contrario anche le circostanze di fatto sopra segnalate, — si può porre l'ipotesi che attraverso il tempo, nelle suddette Regioni, siano andati affievoelndosi i pregiudizii che prima ostacolavano più spesso le unioni eterogame. Negli altri Compartimenti, dove l'attrazione I aumenta, si può supporre viceversa che questo variare del senso di simpatia dei simili, pur agendo in eguale o diversa misura sugli indici, è largamente compensato dall'influenza delle circostanze di fatto segnalate, sì da prodursi in definitiva un aumento degli indici stessi.

9. Riassumiamo brevemente le considerazioni fatte nelle pagine precedenti.

Come abbiamo ricordato, lo studio dell'attrazione matrimoniale può esser fatto mediante varii indici dei quali ciascuno ha un proprio significato e quindi illustra un particolare aspetto del fenomeno. Relativamente al carattere esaminato crediamo di aver messo in evidenza le principali « circostanze di fatto » che — a parte quello che potrebbe chiamarsi il senso di simpatia degli sposi simili — influiscono sulla variabilità nel tempo e nello spazio, degli indici calcolati.

È presumibile inoltre che attraverso il tempo i matrimoni tendono a divenire più liberi, ossia tendono a scomparire quei pregiudizi che un tempo ostacolavano più spesso le unioni eterogame: ma la complessità del fenomeno studiato sul quale influiscono molteplici fattori, e la struttura degli indici adoperati — impediscono ovviamente di ricercare una sicura interpretazione della variabilità degli indici stessi intesa come variabilità del senso di simpatia dei simili.

GRAFICO 1
INDICI DI ATTRAZIONE (I), INDICI DI RASSOMIGLIANZA (S), INDICI DI OMOGAMIA (ω)
E F EQUENZA DELLE VEDOVE (F) NEI MATRIMONI CLASSIFICATI PER STATO CIVILE
DEGLI SPOSI IN ITALIA NEGLI ANNI 1866-71-76 ···· 1926
MONTE
LIGURIA
LOMBARDIA
MARCHE
UMBRIA
LAZIO
209.60
LUCANIA
CALABRIA
168.76
SICILIA
167.60
135,37
135,93
VENETO
EMILIA
TOSCANA
ABRUZZI
CAMPANIA
PUGLIE
SARDEGNA
REGNO
I
ω
S
F
100
75
50
25
0
1866 71 76 81 86 91 96 1901 06 11 15 21 26

Considerazioni su l'economia dinamica

Nota del socio corrispondente **G. Gallucci**

(Adunanza del dì 2 maggio 1936 - XIV)

Sunto. — Premessa la critica dei concetti di lavoro sociale e valore economico .ccenna alla necessità di superare i modelli meccanici dell' economia classica e a recente economia dinamica. Definito il *potenziale del valore economico* si espone primo tentativo di sostituire ad un modello meccanico un modello elettrodina-o: interpetrazione economica delle leggi di Ohm e di Kirhhoff.

1. *Il lavoro sociale ed il valore economico.* Lavoro sociale è l'eser-io della umana attività volta allo scopo di provvedere alla soddisfazione bisogni dell' uomo nella vita associata. I prodotti del lavoro sociale sono eni economici.

L' uomo sfrutta per i suoi bisogni tutte le energie e le materie prime la natura pone *gratis* a sua disposizione. Tale sfruttamento è opera l'ingegno umano, che, nella vita associata, si esplica con l'attività or-nizzatrice del lavoro di produzione.

I bisogni dell' uomo non sono soltanto materiali: l' attività culturale ligione, arte, filosofia, scienza) nasce con la stessa vita associata e progre-ce insieme con questa. La *civiltà* risulta da queste due forme di attività iana: attività culturale, attività organizzatrice del lavoro di produzione.

Si distinguono varie specie di lavoro sociale: 1.° lavoro produttivo pro-amente detto; i corrispondenti *beni* sono cose materiali, merci; 2.° lavoro convezione (trasporto); 3.° lavoro di distribuzione e di amministrazione mmercio e servizi pubblici). Tutti presuppongono il lavoro organizzatore. clientela di un magazzino, la competenza acquistata da un ingegnere, un professore, da un magistrato, non sono beni materiali, non sono merci, si debbono considerare come beni economici in senso lato, perchè sono odotti di lavoro sociale. Un progetto d' un ingegnere; l' opera di direzione una fabbrica; l'ora di lezione del professore che prepara i futuri avvo-ti, o medici, o ingegneri; la diagnosi di un medico, sono beni economici o stesso titolo di un abito, di un paio di scarpe ecc.

Il *valore*, in generale, di una cosa prodotta con un determinato scopo, l' efficacia o l' attitudine maggiore o minore che ha quella cosa al rag-ungimento del fine per il quale è prodotta. Questa efficacia si manifesta tto due aspetti: 1.° il *valore d' uso*, che è nella misura in cui il prodotto ddisfa ai bisogni dell' uomo; 2.° il *valore di scambio* o potere di acquisto altri beni economici.

Il primo aspetto conduce alla determinazione del valore come *utilit marginale*, il secondo dà luogo a tutte le particolarità della circolazion economica; l'uno e l'altro presuppongono il concetto della *paoprietà*: no si può usare un bene e non si può scambiarlo che quando se ne può disporr

« La proprietà, quando è conseguenza del lavoro, rappresenta l'attivit « dell'organismo, come il pensiero rappresenta l'attività dell'anima: è « segno visibile della nostra parte nella trasformazione del mondo material « come le nostre idee, i nostri diritti di libertà sono il segno della nostr « parte nella trasformazione del mondo morale » (MAZZINI, *ultimi scritt* 1873).

« La proprietà privata completa la personalità umana: è un diritto, « se è un diritto è anche un dovere. Tanto che noi pensiamo che la pro« prietà dev'essere intesa in funzione sociale; non quindi la proprietà pas« siva, ma la proprietà attiva, che non si limita a godere i frutti dell « ricchezza, ma li sviluppo, li aumenta, li moltiplica » (MUSSOLINI, *discors al Senato*, 13 gennaio 1934, XII).

2. *Il ritmo o coerenza interiore della vita associata.* Il funzionament della vita sociale è basato su un fatto fondamentale insopprimibile: la disuguaglianza delle attitudini e delle attività dei singoli. Da ciò la prima naturale divisione del lavoro ed il raggruppamento degl'individui in *class* (caste, iloti, servi della gleba, le *élites*). La configurazione di queste classi dipende da condizioni di tempo e di luogo, ma in ogni tempo e in ogni luogo si nota l'ordinamento delle classi in *gerarchie* in vista di una *collaborozione*. Elemento perturbatore: la *coalizione* in tutte le sue forme. Mentre nella collaborazione di classe, pur non trascurando le iniziative e gl'interessi dei singoli, è tenuto principalmente presente l'interesse collettivo, nella coalizione prevalgono gl'interessi immediati dei singoli, coalizzati contro altri individui e contro lo *stato* che è la prima realizzazione concreta dell'unità della vita associata; è l'insorgere del *privilegio* contro la *legge* (le caste, gli stati privilegiati prima della Rivoluzione, i sindacati sorelliani ecc.). Le *corporazioni* medioevale si presentano sotto l'aspetto di coalizioni corrispondenti a particolari sistemi politici e si svolgono in simbiosi con questi (sistemi feudali, comuni e signorie in Italia, monarchia assoluta in Francia). La corporazione come collaborazione delle classi e come funzione statale è la novità è la conquista del Fascismo.

Un altro elemento perturbatore della collaborazione delle classi è stato sempre nella svalutazione del lavoro produttivo da parte delle classi dirigenti; la stessa economia identificò *lavoro* con *fatica* e con *pena* (concezione edonistica). Una solenne rivendicazione dei diritti del lavoro è nella *Carta* mussoliniana. E nel discorso al Campidoglio dell'11 novembre XIII troviamo scolpite queste parole: « Il Fascismo sancisce l'eguaglianza degli « uomini dinanzi al lavoro, *inteso come dovere e come diritto, come gioia*

creatrice, che deve dilatare e nobilitare l'esistenza, non mortificarla o deprimerla ».

Il puro individuo, come *homo oeconomicus* è una pura astrazione; la ncezione atomistica della vita associata che è alla base dell'ideologia erale, dell'ideologia marxista e del capitalismo, è superata dal Fascismo. Stato implica l'individuo e le sue iniziative, e, viceversa, l'individuo plica lo Stato, perchè esso non può considerarsi scisso dalla sua funzione ciale. Le iniziative individuali, lasciate completamente libere, si rivelano senzialmente anarchiche; è dunque necessario l'intervento di una potenza dinatrice (lo Stato) per la coordinazione delle attivttà singole subordinate fini d'interesso generale.

Questo, che può dirsi di tutte le forme di attività, vale in modo speciale r l'attività economica, donde la necessità e la legittimità di un intervento llo Stato nel reggimento economico (Esempi tipici di Colbert e di Napoone, le varie forme attuali della economia controllata: Mussolini, Hitler, tahlin).

Gl'individui singoli sono disuguali per attività e potenza, ma nella colborazione, cioè *davanti alla legge* sono uguali. Da ciò l'esclusione del *ivilegio*, ma non della *gerarchia*, che è nello stesso esercizio della funone sociale degli individui. « E se la maggiore o minore attività nel lavoro è sorgente di disuguaglianza, quell'ineguaglianza materiale è pegno d'eguaglianza morale, conseguenza del principio che ogni uomo dev'essere retribuito a seconda dell'opera sua » (Mazzini, *ultimi scritti*, 1873). Tali suguaglianze però non debbono accentuarsi sino a determinare distanze valicabili tra gli alti strati sociali ed i più bassi, sì da dare lo spettacolo lla ricchezza dei pochi e della miseria del maggior numero. La collabozione e l'organizzazione della viia sociale debbono proporsi di *raccorciare n gradualità ed inflessibilità le distanze fra le possibilità massime e quelle inime della vita*. È ciò che *io chiamo una più alta giustizia sociale*. (Mussolini, *discorso citato*).

Le considerazioni che precedono chiariscono il significato del ritmo o erenza interiore della vita associata. Vi è una logica della vita sociale; uesta nel suo aspetto primordiale appare come *diritto*, per specializzarsi elle due direzioni determinate dalla dialettica Stato-individuo (politica ed onomia). La costruzione delle corrispondenti scienze è formazione di hemi o modelli, non fissi ed immobili, ma progressivi con l'evoluzione ella vita sociale. Noi ora fermeremo la nostra attenzione sull'economia, d innanzi tutto cercheremo di delineare il *sistema complèto* [1]) dei principi, he si accentrano nel concetto del valore economico.

---

[1]) Su la funzione ed il significato del *sistema completo* dei principii di una teoria, edi il mio « *Nuovo saggio su l'infinito* » Atti Acc. Pontaniana. Napoli, 1934.

3. *Critica del concetto del valore economico.* Il geometra si rifiuta di definire il punto, la retta, il piano; il fisico si rifiuta di definire la forza, la massa; l'economista si rifiuta di definire il valore economico. (Cfr. PARETO *Fatti e teorie*, p. 107).

Le difficoltà cui si va incontro nel confronto dei beni economici risultano da tutta la storia dell'economia· È ben nota la varia fortuna dell'equazione valore-lavoro nelle interpetrazioni di SMITH, RICARDO e MARX, come pure è noto il tentativo dell'economia matematica di quantificare il valore *utilità marginale* in base alla concezione edonistica.

Non si può parlare dell'equivalenza di due beni economici in modo assoluto. Limitandoci per ora ai beni materiali, un abito ed un anello d'oro hanno diverso valore d'uso, però l'uno e l'altro presentano: 1.° un *quantum* di materia prima, 2.° un *quantum* di lavoro impiegato per estrarre la materia prima e renderla adatta alla trasformazione necessaria, 3.° un *quantum* di lavoro specializzato (tessitura, coloritura, lavoro del sarto, lavoro dell'orefice); 4.° un *quantum* di lavoro sociale indistinto, che trovasi concretato in tutti i beni economici (lavoro organizzatore, lavoro di convezione...). Anche introducendo il concetto marxistico di lavoro indifferenziato, *pura erogazione della forza di lavoro*, si potranno confrontare i due beui rispetto al lavoro complessivo corrispondente, ma resterà sempre la differenza insopprimibile delle materie prime. Lo siesso può dirsi dei beni non materiali, se non che al posto delle materie prime subentrano lè *abilità* acquistate con l'esercizio dell'intelletto in determinati campi, ed il lavoro specializzato è nell'esplicazione concreta di queste abilità (il corso di lezioni del professore, il lavoro del ragioniere, del medico, del magistrato...).

Supponiamo ora che sia fissato il sistema di produzione, e che, in base ai bisogni ed alle quantità corrispondenti dei beni, siano determinate le condizioni dello scambio nel complesso economico che dicesi *mercato*. Ebbene, *diremo che i valori di due beni economici A, B, rispetto ad un determinato mercato M, sono eguali, quando A e B sono permutabili.* L'unità di misura dovrà essere il valore di un bene permutabile con tutti gli altri e dotato dei caratteri di immutabilità e comodità nello scambio. Superato il periodo del semplice *baratto*, si è automaticamente formata una *unità pratica* del valore economico, l'unità monetaria. Dicesi *prezzo* il valore economico espresso in moneta.

Bisogna ora distinguere il *prezzo* dal *costo di prodnzione*, che è il complesso dei valori degli elementi costitutivi del bene economico: materie prime, mezzi di produzione, lavoro specializzato e lavoro indifferenziato. Anche il costo di produzione può esprimersi in unità monetaria, e quindi è paragonabile al prezzo del bene.

Siano determinati il sistema di produzione ed i particolari della circolazione e dello scambio: *in condizioni normali il prezzo tende ad eguagliare il costo di produzione.* Che ci possa essere una differenza tra costo e prezzo

sulta chiaramente dall'esempio che segue, e che ha dato luogo alla teoria cardiana della rendita e poi, nel sistema edonistico, al concetto del valore onomico come *utilità marginale*. Supponiamo che per l'aumento della polazione si sia imposta la necessità di coltivare delle terre meno fertili quelle già coltivate sin ora ed il cui prodotto si è rivelato insufficiente. n quintale di grano della terra più fertile ha minor costo di produzione di 1 quintale di grano della terra meno fertile, ma i due quintali di grano, il mercato, hanno lo stesso prezzo. La differenza va a vantaggio del proietario o del coltivatore della terra più fertile e costituisce la *rendita* quella terra.

Cerchiamo ora di approfondire il concetto del valore economico sostiendo all'*unità pratica* di misura del valore, una unità *assoluta*.

Nella fisica si distinguono le unità pratiche e le unità assolute, secondo he esse dipendono o no dalla latitudine. Così, il gramma peso, come forza, diverso a Napoli ed a Londra, mentre la *dine* e la stessa, come pure il rammo-massa. È possibile una distinzione simile in economia? La critica ell'economia capitalistica, fatta da Carlo Marx può definirsi come il primo ntativo di sostituire all'unità pratica del valore economico una unità assota, cioè indipendente dalle particolarità del sistema di produzione e della rcolazione. È questo il significato più profondo del «Capitale»; i concetti plus-lavoro e plus-valore presuppongono una unità assoluta del valore conomico, che Marx esprime così: il lavoratore permuta l'impiego della ua *forza di lavoro* per 5 ore giornaliere con i mezzi della sua sussistenza. e l'operaio, invece di lavorare 5 ore giornaliere, lavora per 10 ore, le altre ore di lavoro costituiscono il suo plus-lavoro, ed il suo corrispondente alore è il plus-valore, che in regime capitalistico va a vantaggio del capilista. Indarno si cercherebbe nella opera di Marx il procedimento che onduce a questo risultato, che è il presupposto implicito nella critica marxia. Tenteremo di renderlo esplicito a modo nostro.

1.° Anche se l'equazione valore-lavoro è errata, sussiste una ben derminata corrispondenza tra valore economico e lavoro, quando s'intenda er bene economico ogni prodotto di lavoro sociale e non soltanto una cosa ateriale. Non esistono beni economici che non siano, direttamente o inirettamente prodotti di un lavoro sociale, dai sistemi primitivi di produione al macchinismo contemporaneo.

2.° Gli elementi assoluti, cioè indipendenti dal sistema di produzione dai particolari della circolazione sono determinabili solo *in media*. Sia n numero degl'individui associati e sia h il numero di ore lavorative neessarie per la produzione della somma di beni (di ogni specie) necessari l sostentamento in un periodo di tempo nel quale n possa ritenersi presso poco invariabile. *Risulterà determinato in media il numero* m *di ore avorative spettanti ad ogni individuo.*

Certo non si può qui pretendere la precisione matematica, come nella

quantificazione delle grandezze fisiche. Le grandezze dell'economia non so
fisse, ma variabili in un certo intervallo. La somma dei beni necessari p
il sostentamento degl'induvidui associati dipende dall'*intervallo di suss-
stenza*; *h* si supporrà determinato in corrispondenza alle condizioni med
della vita associata. Il numero *n* deve necessariamente comprendere gl'
nabili al lavoro; supporremo perciò che *h* sia determinato in modo da ten
conto di una quota d'assicurazione equamente distribuita tra gli abili a
lavoro. La quota *m* di ore lavorative giornaliere spettanti ad ogni singo
individuo della società nel periodo che si considera è rivelata dall'espe-
rienza. Allora *ogni individuo associato permuta l'impiego della sua forz
di lavoro per* m *ore giornaliere con i mezzi del suo sostentamento.*

Il numero *m*, dovendo essere intero, può ritenersi determinato per ec-
cesso; in *m* è quindi già compreso un plus-lavoro, che può intendersi com
quota individuale di assicurazione per il mantenimento della vita associat
(plus-lavoro normale). Se un individuo lavora $m + \alpha$ ore giornaliere, α sarà
il suo *plus-lavoro* e se quell'individuo lavora $m - \alpha$ ore giornaliere, α rap-
presenta il suo *minus-lavoro*. Moltiplicate per diecine di milioni il numer
di queste quote ed avrete la concentrazione del plus-lavoro o del minus-
lavoro. La concentrazione del minus-lavoro è catastrofica (periodo del co-
munismo di guerra in Russia); la concentrazione del plus-lavoro avvien
a vantaggio di pochi o di molti, ma può anche avvenire a vantaggio dell
Stato (dalla *Nep* ai piani *quinquennali*).

La così detta quistione sociale sorge dal problema della distribuzion
delle grandi masse di beni economici corrispondenti al plus-lavoro com-
plessivo; l'equa distribuzione è la *giustizia sociale.*

Esposte, nella critica del valore economico, le grandi linee del sistema
completo dei principii dell'economia, notiamo che negli sviluppi della scienza
gli schemi sono stati costruiti su modelli meccanici, i quali, nell'economia
matematica, condussero alle equazioni dell'equilibrio economico di Pareto
e di altri. Anche la moderna economia dinamica e le sue equazioni integro-
differenziali presuppongono un modello meccanico; persino la teoria del ca-
pitale di Marx, che fondamentalmente si basa su gli stessi principii dell'e-
conomia classica, considera un caso particolare dell'equilibrio economico
inteso per analogia con leggi meccaniche. La critica del concetto di *capitale*
ci condurrà al superamento del modello meccanico con l'approfondimento
di alcune analogie tra i fatti economici ed i fenomeni elettrodinamici. Il
nostro punto di partenza sarà l'aspetto fondamentale del fatto economico:
*la produzione ha luogo a distanza dal consumatore; il flusso economico
va dalla produzione al consumo.* Da ciò un peculiare carattere del bene
economico, che diremo *potenziale* del valore economico, già implicito nei
gradi di *rarità* e di *durabilità* notati da Ricardo.

4. *Il potenziale del valore economico; la legge di* Ohm *espressa in*

nini economici. Per portare i beni economici dalla produzione al consumo leve spendere lavoro sociale, che viene impiegato per vincere *resistenze* diversa natura: 1.° le distanze (organizzazione dei trasporti); 2.° le diffità che nascono dalla molteplicità dei consumatori rispetto al piccolo nero dei produttori (organizzazione del commercio); 3.° le altre resinze dipendenti da tutta la complessa vita economica: gli alti prezzi, la te pressione tributaria, l'accaparramento ed il bagarinaggio, le barriere ;anali, i monopoli, *trusts* e *cartelli*, le particolarità della circolazione netaria (inflazione, deflazione), la disoccupazione, ed, in fine, l'accentuato polamento (segnalato da MUSSOLINI come elemento di resistenza econo:a) Tutte queste resistenze si oppongono al flusso economico ostacolando passaggio della produzione attraverso i vari strati sociali.

Il bene economico, in quanto occupa una posizione determinata nella colazione, a distanza maggiore o minore dallo sbocco, richiede lavoro per ere portato al consumo (potenziale zero). Possiamo anche dire che i beni nomici, a distanza dal consumo sono dotate di una forza *economico-moce*. Ebbene, *il capitale è una somma di beni dotata di una forza econoco-motrice*. La formazione di *capitali* è la caratteristica fondamentale di ii sistema di produzione. Perciò alcuni storici hanno creduto di trovare ecie di capitalismo presso i greci ed i romani; ma bisogna distinguere *vitale* e *capitalismo*; il capitale è in ogni sistema di produzione, il capiismo è un sistema di produzione storicamente definito ed avente caratistiche proprie (proprietà privata dei mezzi di produzione, la forza di voro considerata come merce e sottoposta alla legge della domanda e dell' offerta).

Il concetto del potenziale del valore economico gitta una nuova luce lle interminabili discussioni sull'equazione valore-lavoro e permette di rivare sino in fondo nella critica dell'economia marxistica e dell' ecomia capitalistica.

Innanzi tutto risulta in tutta la sua importanza la distinzione tra la antità di un complesso di beni economici ed il potenziale, corrispondenmente alla distinzione tra carica elettrica q ed il suo potenziale v. Ad empio, un quintale di farina destinato alla panificazione, ed un quintale di ano destinato alla semina differiscono per il loro potenziale.

Indicheremo con i l'intensità del flusso economico, cioè la quantità di ni che in un determinato tempo passa attraverso i vari strati sociali. abilito un valore *normale* di i, ad ogni aumento di i corrisponde il soaconsumo, ad ogni diminuizione il sottoconsumo.

Sia e la forza economico-motrice della produzione (in breve, lo *slancio*, *tensione* della produzione). Un aumento di e al disopra del normale, corsponde alla sovraproduzione, una diminuzione di e alla sotto-produzione.

Sia, infine, r la resistenza al flusso economico, considerata in tutti gli lementi che segnalammo.

Le grandezze *i, e, z* corrispondono rispettivamente all'intensità dell corrente elettrica, alla forza elettro motrice ed alla resistenza. Il principi più generale della dinamica economica è la legge di Ohm espressa in ter mini economici: *le variazioni di* i *avvengono nello stesso senso delle va riazioni di* e *ed in senso contrario alle variazioni di* r. Questa legge val indipendentemente dal sistema di produzione e dai particolari della circo lazione, solo si configura diversamente nei vari sistemi. Ammettete, pe esempio, la libera concorrenza, e la legge di Ohm includerà la legge dell domanda e dell'offerta.

Le applicazioni sono numerose ed importanti: 1.° l'estensione all'eco nomia delle leggi di Kirchhoff sui circuiti derivati, e quindi la deduzione delle leggi degli sbocchi di Say e dei costi comparati; 2.° la risoluzione de paradosso di Carlyle (miseria generale nell'abbondanza) data in una mia precedente nota; 3.° La trattazione sistematica delle crisi economiche, dalle crisi così dette di congiuntura (tipo: le sette vacche grasse e le sette vacche magre di biblica memoria) alle crisi parziali di produzione (tipo trattato da Fleeming Jenkin che si risolve con l'intervento di tipi nuovi di prodotti) ed alle crisi generali del sistema di produzione (tipo *crisi inglese* e crisi attuale).

5. *L'economia pura e l'economia dinamica.* L'economista puro resta fermo nei *principii consacrati* ritenendo come contaminazione ogni intervento di principii estranei (politici o di altra natura).

L'economia programmatica, in tutte le sue forme, viene considerata come una pseudo economia. Ora, è un fatto innegabile che alcune manifestazioni dell'attuale crisi danno una smentita ad alcuni dei principii consacrati; dunque lo *schema dell'economia pura va corretto e completato.* Allo stesso modo, le nuove scoverte della fisica hanno richiesto una rielaborazione del sistema completo dei principii, allo scopo di eliminare le contraddizioni. L'economista che pretende di costruire la sola scienza economica possibile, salta a piè pari le contraddizioni e resta fermo nel suo fantastico *homo oeconomicus*; è come se un fisico, per restare nella meccanica pura, del moto uniforme e rettilineo, si rifiutasse di passare al 2.° ed al 3.° principio della dinamica, e poi alla meccanica ondulatoria. Porterò due notevoli esempi.

1.° A giustificare in generale la libera concorrenza (moto rettilineo ed uniforme) l'economista puro presenta il suo *teorema*: « il protezionismo implica necessariamente distruzione di ricchezza ». Il *quantum* di ricchezza distrutta sia *A* (costo dell'operazione). Sopprimendo la protezione si ha la chiusura di alcune fabbriche, diecine di migliaia di disoccupati, con tutte le conseguenze che corrispondono alla distruzione di un *quantum B* di ricchezza. L'economista puro si rifiuta di considerare *B*, ma l'uomo di governo applica istintivamente il 2.° ed il 3.° principio della dinamica, ri-

nosce *B*, lo paragona con *A* e se trova che *B* è maggiore di *A* mantiene protezione sull'industria minacciata.

2.° I principii del sistema corporativo fascista e quelli del *recovery ct* di ROOSEWELT si propongono di attenuare la crisi economica, o come cono gli economisti, di provocare una *ripresa* dopo la crisi. I provvedienti mussoliniani e quelli di ROOSEWELT sono aspramente criticati *perchè on aiutano ma impacciano la ripresa*; ed è già bell'e pronta una serqua teoremi in appoggio. Non si comprende che l'omissione di quei provvementi produrrebbe un danno economico maggiore. Come gli scolastici edioevali arrivarono al criterio della doppia verità (una proposizione può ssere falsa in filosofia e vera in teologia), così gli economisti puri, che ducono tutta l'economia ad una quistione di *prezzi*, non potendo negare efficacia dell'economia controllata, riaffermano il criterio della doppia erità: *una proposizione può essere falsa in economia e vera in politica.* non si accorgono che il fatto fondamentale della vita economica, *che è sistema di produzione*, è anche squisitamente politico.

Concludo che l'affiorare, nella crisi attuale, di manifestazioni della vita conomica in contrasto parziale o totale con i principii consacrati, deve nporre un riesame del sistema completo dei fondamenti della scienza e costruzione di uno schema più aderente alla reale fenomenologia dei tti economici (sostituzione di un'economia dinamica alla tradizionale ecoomia statica, impiego dei metodi statistici su larga scala, discussione più pprofondita dei concetti di lavoro sociale e valore economico).

Incrostazioni calcaree simulanti organismi fossili

Nota del socio ordinario **Geremia D' Erasmo**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Alcuni lamellibranchi del Sopracretacico del Gargano presentano un rivestimento generalmente fatto da rilievi e solchi concentrici, che simula avanzi di organismi fossili. L' A. ne spiega l' origine, che viene attribuita all' azione incrostante di acque mineralizzate.

Sono note ai geologi ed ai paleontologi numerose *forme imitative* naturali, che si rassomigliano spesso a resti di animali o di piante, a uova, a coproliti, a orme fisiologiche, a impronte fisiche, e che pur essendo il più delle volte affatto estranee ai corpi organici, vennero dagli antichi naturalisti di solito scambiate per fossili. Lo studio di tali forme imitative, indicate generalmente col nome (improprio e adoperato pure con altro significato) di *pietre figurate*, o con quelli di *icoliti*, *stimmate geologiche*, *stimmatoliti* ecc., e variamente interpretate dagli autori moderni, può riuscire interessante, contribuendo a far conoscere le diverse condizioni chimico-fisiche dell' ambiente in cui esse si generarono. È per questo, che alcuni studiosi, e fra gli italiani specialmente il Bombicci [1]), l' Issel [2]) e il Neviani [3]), cercarono di darne, malgrado la mutabilità degli aspetti, una descrizione, e, tenuto conto delle differenze della giacitura, della genesi, della configurazione e della costituzione chimica, ne tentarono addirittura una classificazione [4]).

Data la relativa povertà dei documenti, di cui ancora oggi si dispone, e le incertezze rimaste sulla interpretazione di parecchie forme, mi pare non inutile ricordare, in questa nota, la frequenza con cui, in alcuni terreni mesozoici del promontorio del Gargano, si rinvengono certe incrostazioni calcaree, che simulano a primo aspetto resti di protozoi o di celenterati, specialmente *Sphaeractinia*, e che tuttavia altro non rappresentano se non

---

[1]) Bombicci L., *Corso di mineralogia*, 2.ª ediz., vol. I, pag. 337. Bologna, Zanichelli, 1878. — Id., *Sulle reciproche analogie fra talune forme frequenti ma finora inesplicate dei minerali delle argille scagliose d' intrusione ascendente*. Mem. Acc. Sc. Ist. Bologna, 1896.

[2]) Issel A., *Bioliti e pisoliti*. Boll. R. Com. geol. d' It., vol. XLVI, pp. 297-340. Roma, 1916-18.

[3]) Neviani A., *Delle icoliti (pietre figurate)*. Boll. Soc. geol. it., vol. XXXV, pp. 189-214. Roma, 1916. — Id., *Ancora sulla struttura a coni concentrici di alcuni minerali e rocce*. Ibid., vol. XXXVI, pp. 45-53. Roma, 1917.

[4]) Issel A., *Prime linee di un ordinamento sistematico delle pietre figurate*. Mem. R. Acc. Lincei, Cl. sc. fis., vol. XI, fasc. 11, pp. 631-667. Roma, 1916. — Id., *Esempi notevoli di icoliti*. Ibidem, s. 5.ª, vol. XIII, pp. 161-174. Roma, 1920.

no dei tanti, mirabili modi, con cui l'acqua filtrante costruisce, depositando in condizioni opportune i sali, che ha dapprima disciolti e quindi asportati.

Le incrostazioni, delle quali mi occupo, si rinvengono sopra varî fossili del calcare bianco, selcioso, spesso bucherellato e spugnoso per decalcificazione, inquinato da terra rossa, ricco di molluschi e corallari silicizzati con più scarsi brachiopodi e orbitoline, che è sviluppato specialmente nei dintorni di Vico Garganico ed è noto sopratutto per le ricerche geolo-

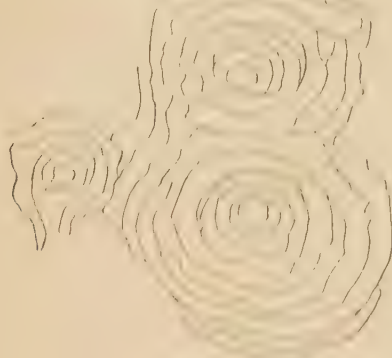



Fig. 1.

giche e paleontologiche di PARONA [1]) e di CHECCHIA RISPOLI [2]), i quali vi rinvennero, fra le altre specie, *Nerinea Stoppanii* Gemm., *Caprotina Roemeri* Gemm., *Sphaerucaprina Woodwardi* Gemm., *Monopleura forojuliensis* Pir., *Praeradiolites Paronai* Par. *Radiolites radiosus* d'Orb. ecc., cioè un complesso di forme in parte del Cenomaniano e in parte del Turoniano, concludendo che in quella località i due piani si succedono conservando immutati i caratteri litologici.

Parecchi esemplari di chamacee e di rudiste vennero recentemente raccolti in detta località, e precisamente presso Coppa della Guardia a sud dell'abitato di Vico, dalla prof. M. FIORE, in occasione di alcune ricerche paleobotaniche da lei compiute sul posto, i cui risultati verranno prossimamente pubblicati.

Alcuni di questi lamellibranchi, in parte silicizzati o riempiti da sabbia quarzosa, attualmente conservati nel Museo di Paleontologia dell'Univer-

[1]) PARONA C. F., *Cenni sulle faune sopracretaciche a rudiste del Monte Gargano*. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. sc. fis., s. 5ª, vol. XXV, 1° sem., fasc. 5°, pp. 271-274. Roma, 1916.

[2]) CHECCHIA RISPOLI G., *Osservazioni geologiche nei dintorni di Vico (Gargano)*. Rend. R. Acc. Lincei, Cl. sc. fis., s. 5ª, vol. XXV, 1° sem., fasc. 6°, pp. 352-354. Roma, 1916.

sità di Napoli, hanno richiamata la mia attenzione, per il fatto, che presentano la loro superficie assai variamente cosparsa da strani rilievi (fig. 1), quali a volta ricordano, per la loro configurazione circolare e per il regolar succedersi a giri concentrici, la struttura di certi foraminiferi e di alcun *Sphaeractinia*; a volta si avvicinano invece, per l'aspetto spiccatament ellittico, al gen. *Ellipsactinia*, oppure richiamano altri idrozoi come le *Stromatopore*, o ancora avanzi organici spettanti a tipi diversi. Ma quest apparenze si rivelano subito grossolane e fallaci, appena si esamini con diligenza la superficie dei rilievi, poichè mancano totalmente le particolarità strutturali proprie di questi fossili, non essendo visibile alcun accenn di lamine riunite da pilastrini, o un qualsiasi tessuto a canali radiali. D'altra parte, come facilmente si osserva nelle figure schematiche riportate l'andamento di questi rilievi varia notevolmente da punto e punto, mostran

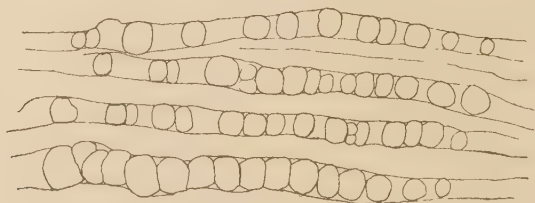



Fig. 2.

dosi, accanto alle zone concentriche circolari più sviluppate, altre incomplete e semicircolari o ondulate o irregolarmente poligonali, costituite da cordoncini quasi uniformemente rilevati o da file di granuli più o meno minuti e più o meno ravvicinati (fig. 2). L'aspetto generale dei solchi ricorda in qualche punto, con le anse e le biforcazioni che presenta, le linee papillari dei polpastrelli umani, e, almeno in un certo senso, anche quelle singolari cavità, a concamerazioni vuote, separate da sepimenti concentrici convessi e disposti in maniera analoga a quella dei petali di una rosa doppia, che si rinvengono in alcune rocce effusive assai acide e che vengono distinte comunemente col nome di *litofisi* [1]). Ma, come si è detto dianzi, queste strane e svariate ornamentazioni, che rivestono parecchi fra i molluschi fossili dei terreni sopracretacici di Vico Garganico, seguendone spesso con regolare uniformità le sporgenze e le rientranze della superficie della conchiglia altro non sono che incrostazioni prodotte dal depositarsi del carbonato di calcio sciolto dalle acque lentamente circolanti entro la massa di quei sedimenti.

Ecco come, a mio parere, può spiegarsi tale rivestimento.

Disciolto ed asportato lo strato esterno della conchiglia, nel sottile

---

[1]) Artini E., *Le rocce. Concetti e nozioni di petrografia*, pag. 244, fig. 75. Milano, Hoepli, 1919.

oto così prodottosi è pervenuta l'acqua mineralizzata in movimento; e ichè questa per la particolare configurazione dei meati non andava soggtta che a lentissimo moto e in alcuni punti quasi ad uno stillicidio preschè continuo, la sostanza minerale ha potuto depositarsi rivestendo di : nuovo involucro le conchiglie di questi molluschi, che hanno funzionato mplicemente come materiali inerti. Il deposito, avvenuto più o meno radamente a seconda delle condizioni di temperatura e della quantità di li calcarei disciolti nell' acqua, non ha formato un rivestimento uniforme continuo alla superficie dei fossili, ma si è dapprima di preferenza verizato in alcuni punti, che hanno funzionato da centri attrattivi. Intorno l essi andò a disporsi successivamente la sostanza calcarea formando giri ncentrici più o meno regolari e gradatamente più ampi, a somiglianza quanto si verifica nella formazione delle ooliti e pisoliti allorchè poggando sopra un piano assumono forma emisferica, sviluppandosi solo suriormente ad esso. Talvolta il deposito della sostanza minerale seguì vece quali linee direttrici i solchi longitudinali propri della primitiva ruttura o ornamentazione della conchiglia, riempiendoli e costituendo rdoni più o meno paralleli, di spessore uniforme, o file di granuli disposti rosario.

In conclusione, la descritta incrostazione è dunque dipendente dalle cque meteoriche, le quali penetrando nei meati provocarono, in seno alla ateria calcarea, un fenomeno di concentrazione molecolare intorno ad un ran numero di punti variamente situati, com'è dimostrato dalla struttura equentemente concentrica dei rilievi.

Se si volesse seguire lo schema dell' ordinamento proposto dall' Issel [1]) er tutte quelle tracce, o segni, che nelle masse rocciose attestano condiioni fisiche speciali proprie ai sedimenti in cui si osservano, e che egli hiama complessivamente *stimmate geologiche* allorchè, come nel caso preente, non costituiscono individui, o subindividui ben definiti (ciò che si erifica invece nelle *icoliti*), si dovrebbe far rientrare il rivestimento descritto ella classe delle *stimmate idrominerali*; ma poichè intendimento dello crivente è stato semplicemente quello di esporre brevi osservazioni, che on sono sembrate prive di interesse, sopra le particolari condizioni di conervazione e gli speciali caratteri di superficie di alcuni di questi molluschi opracretacici del Gargano, nella speranza che altri ne raccolgano ed espongano di più esaurienti e conclusive, mi limiterò a notare, come lo studio li tali fossili offra ancor oggi l'interesse di molteplici osservazioni da compiere e di svariati problemi da risolvere.

Napoli, Istituto di Paleontologia della R. Università, 6 giugno 1936 - XIV.

---

[1]) Issel A., *Cenni di un ordinamento sistematico delle Stimate geologiche.* Rend. R. Acc. Lincei, Cl. sc. fis., s. 5ª, vol. XXX, 1.º sem., pp. 106-109. Roma, 1921.

Sulla costruzione del centro di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana di area costante e a deformate affini.

Nota del socio corrispondente **Mario Pascal**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Si trovano due semplici costruzioni del centro di curvatura delle troiettorie dei punti di una figura piana di area costante che si muove deformandosi e rimanendo affine a sè stessa.

Continuando le ricerche sulla cinematica della figura piana deformabile di area costante che si muove mantenendosi affine a sè stessa [1]), viene spontaneo il porsi il problema di cercare una costruzione che permetta così come si fa nella cinematica della figura rigida, di trovare il centro di curvatura delle traiettorie dei punti della figura mobile.

Scopo di questa Nota è appunto quello di esporre i risultati raggiunti in questo senso. Due sono le costruzioni che si sono trovate: la prima deriva dalla formola già altra volta stabilita [2]) e che dà la relazione fra le grandezze della velocità e della *velocità affine;* la seconda è in sostanza una semplificazione della prima, e si presenta come particolarmente interessante in quanto è applicabile, colle debite modificazioni formali, al caso della figura rigida, fornendo così una costruzione del centro di curvatura delle traiettorie che non ha bisogno della conoscenza dei centri di curvatura della base e della rulletta.

1. Stabiliamo prima di tutto che *il luogo dei secondi estremi dei vettori velocità dei punti di una retta è del pari una retta.*

Adoperando infatti gli stessi simboli e le stesse notazioni delle Note citate, sono

$$(1)\qquad \begin{aligned} x'_1 &= u + ax_1 - by_1 \\ y'_1 &= v + cx_1 - ay_1 \end{aligned}$$

le componenti della velocità di un punto qualunque P della figura mobile punto che vogliamo ora immaginare come punto generico di una retta di

[1]) M. Pascal, *Sul moto di una figura deformabile piana di area costante e che rimane affine a sè stessa* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, (4), v. 3, 1933; — *Sul centro istantaneo di velocità nulla sul moto di una figura piana di area costante e a deformate affini,* Ibid.; — , *Sulll accelerazione nel moto di una figura piana di area costante e a deformate affini,* Ibid.

[2]) M. Pascal, *Sulla cinematica affine di una figura piana di area costante.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, (4), v. 3, 1933.

efficiente angolare $\operatorname{tg}\varphi$. Le coordinate del secondo estremo del vettore locità di P saranno

$$(2) \qquad x = x_1 + x'_1 \quad , \quad y = y_1 + y'_1$$

minando di qui le coordinate di P immaginato variabile sulla retta data, ottiene

$$(3) \qquad (x-u)(c+(1-a)\operatorname{tg}\varphi) - (y-v)(1+a-b\operatorname{tg}\varphi) = 0$$

e è l'equazione di una retta.

Se in particolare si prende (come faremo d'ora in poi) come origine centro istantaneo di velocità nulla, saranno $u = v = 0$ e quindi la (3) si mplifica nella

$$(4) \qquad x(c+(1-a)\operatorname{tg}\varphi) - y(1+a-b\operatorname{tg}\varphi) = 0.$$

In tal caso, come fu già notato nella seconda delle Note citate, i vettori locità di tutti i punti della retta considerata sono tutti ugualmente inmati sulla retta stessa. Si può anzi precisare che *la direzione comune tutti i vettori velocità dei punti di una retta passante per il centro istanneo di velocità nulla è la direzione coniugata a quella della retta stessa spetto alla conica* col centro nel centro di velocità nulla e che è la linea flusso passante per il punto che si considera in quell'istante.

Si deduce allora che *per ogni retta uscente dal centro istantaneo di locità nulla è costante il rapporto fra la grandezza del vettore velocità un punto della retta e la sua distanza dal centro istantaneo.*

Ciò può vedersi subito anche direttamente giacchè, dicendo r la distanza un punto dal centro istantaneo di velocità nulla e φ l'anomalia, si ha

$$|P'|^2 = (ax-by)^2 + (cx-ay)^2 = r^2 \{a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2\varphi + c^2\cos^2\varphi - 2a(b+c)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\}$$

a cui

$$(5) \qquad \frac{|P'|}{r} = k(\varphi) = \sqrt{a^2 + b^2\operatorname{sen}^2\varphi + c^2\cos^2\varphi - 2a(b+c)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}\ .$$

2. Nell'ultima delle mie Note già citate e servendomi delle definioni e dei concetti di geometria affine [3]), io ho chiamato *grandezza della elocità affine* la derivata rispetto al parametro tempo t dell'arco affine i traiettoria, cioè

$$\frac{ds_1}{dt} = (P'P'')^{\frac{1}{3}} = r_1$$

---

[3]) W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Springer. Berlin, 1923; Bd. II, *Affine Differentialgeometrie.*

dove s_1 rappresenta l'*arco affine*, P' e P'' sono le derivate prima e seconda del punto P variabile sulla curva, rispetto al parametro t e il simbolo $(P' P'')$, giusta le notazioni di W. Blaschke, vale mod. $P' \wedge P''$. Trovai ancora che la relazione fra la grandezza della velocità affine e quella della velocità è

$$(6) \qquad v = \rho^{\frac{1}{3}} v_1$$

dove ρ è il raggio di curvatura (ordinario) della curva.

Dalle definizioni si ha dunque che il cubo della velocità affine è il prodotto della grandezza della velocità per la proiezione dell'accelerazione sulla normale alla direzione della velocità. Se in un certo istante si assumono come origine il centro di velocità nulla relativo a quell'istante e come asse delle x la tangente comune alle due curve luogo del centro istantaneo di velocità nulla e dei punti della figura mobile che successivamente coincidono con tale centro, la proiezione dell'accelerazione sulla normale alla direzione della velocità si calcola subito ed è

$$(7) \qquad \frac{r}{k(\varphi)} \left\{ B \operatorname{sen}^2\varphi + C \cos^2\varphi - A \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \right\} - \frac{\lambda V \operatorname{sen}\varphi}{k(\varphi)}$$

in cui i simboli che si adoperano sono quelli già introdotti nelle Note citate.

Essendo quindi $v = r \,.\, k(\varphi)$ la grandezza della velocità il cubo della velocità affine è

$$(8) \qquad v_1^3 = r^2 \left\{ B \operatorname{sen}^2\varphi + C \cos^2\varphi - A \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \right\} - \lambda V r \operatorname{sen}\varphi .$$

Inoltre se si dice ψ l'angolo che la direzione del vettore velocità del punto P forma con l'asse della x, è

$$\cos\psi = \frac{a \cos\varphi - b \operatorname{sen}\varphi}{k(\varphi)} \quad , \quad \operatorname{sen}\psi = \frac{c \cos\varphi - a \operatorname{sen}\varphi}{k(\varphi)} .$$

Ponendo perciò per brevità

$$(9) \qquad \begin{aligned} h(\varphi) &= B \operatorname{sen}^2\varphi + C \cos^2\varphi - A \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ H_1(\varphi) &= \cos\varphi - \frac{\lambda V}{k(\varphi)} \operatorname{sen}\varphi \, (a \cos\varphi - b \operatorname{sen}\varphi) \\ H_2(\varphi) &= \operatorname{sen}\varphi - \frac{\lambda V}{k(\varphi)} \operatorname{sen}\varphi \, (c \cos\varphi - a \operatorname{sen}\varphi) \\ K_1(\varphi) &= \frac{h(\varphi)}{k(\varphi)} (a \cos\varphi - b \operatorname{sen}\varphi) \\ K_2(\varphi) &= \frac{h(\varphi)}{k(\varphi)} (c \cos\varphi - a \operatorname{sen}\varphi) \end{aligned}$$

coordinate del punto Q secondo estremo del segmento disposto da P sulla ezione della velocità, prendono la forma

$$
(10) \qquad \begin{aligned} x &= r H_1(\varphi) + r^2 K_1(\varphi) \\ y &= r H_2(\varphi) + r^2 K_2(\varphi). \end{aligned}
$$

Ponendo ancora

$$
(11) \qquad K_3(\varphi) = H_1 K_2 - H_2 K_1
$$

trova come equazione del luogo del punto Q al variare di r cioè al variare punto P sulla retta di coefficiente angolare $\operatorname{tg}\varphi$, la seguente

$$
(12) \qquad K_1(xK_2 - yK_1)^2 + K_3 H_1(xK_2 - yK_1) - xK_3^2 = 0
$$

e è *l' equazione di una parabola passante per il centro istantaneo di locità nulla e che ha per direzione eccezionale quella della velocità del nto P.*

Si può notare ancora che l'ulteriore punto d'incontro della retta $= x \cdot \operatorname{tg}\varphi$ con la parabola (12) coincide col punto d'incontro della stessa tta con la conica dei flessi

$$
Cx^2 + By^2 - Axy - \lambda V y = 0
$$

che era da prevedersi in quanto che la conica dei flessi coincide con la nica luogo dei punti che in un determinato istante hanno nulla la granzza della velocità affine [4]).

Da quanto abbiamo trovato si deduce subito il modo di costruire il ntro di curvatura della traiettoria di P, in quanto la parabola (12) dà r ogni punto P della retta di coeff. angolare $\operatorname{tg}\varphi$, il punto Q sulla direone della velocità di P che dista da P di v_1^3; la retta (4) dà sulla stessa rezione il punto che dista da P della grandezza v e da esso si può con ocedimenti elementari determinare il punto che dista di v^3 e quindi poi struendo la

$$
\frac{v_1^3}{v^3} = \rho
$$

può trovare sulla normale alla traiettoria di P il centro di curvatura i questa.

3. Un siffatto procedimento appare certamente penoso per la necessità i costruire la parabola (12); ma si può indicare un'altra via la quale semlifica molto la costruzione. Si tratta di considerare ora i punti sulla diezione della velocità di P che distino da ρ della quantità $\dfrac{v_1^3}{v}$.

[4]) Cfr. terza e quarta delle Note già citate.

Con un procedimento analogo a quello prima indicato si trova subi che le coordinate del secondo estremo di un siffatto segmento sono

$$(13) \qquad \begin{aligned} x &= H'_1(\varphi) + rK'_1(\varphi) \\ y &= H'_2(\varphi) + rK'_2(\varphi) \end{aligned}$$

avendo posto

$$(14) \qquad \begin{aligned} H'_1(\varphi) &= -\frac{\lambda V}{k^2(\varphi)} \operatorname{sen}\varphi\,(a\cos\varphi - b\operatorname{sen}\varphi) \\ H'_2(\varphi) &= -\frac{\lambda V}{k^2(\varphi)} \operatorname{sen}\varphi\,(c\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi) \\ K'_1(\varphi) &= \cos\varphi + \frac{h(\varphi)}{k^2(\varphi)}(a\cos\varphi - b\operatorname{sen}\varphi) \\ K'_2(\varphi) &= \operatorname{sen}\varphi + \frac{h(\varphi)}{k^2(\varphi)}(c\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi). \end{aligned}$$

Il luogo dei punti (13) è allora

$$(15) \qquad y - H'_2(\varphi) = \frac{K'_2(\varphi)}{K'_1(\varphi)}(x - H'_1(\varphi))$$

che è una retta passante per il punto di coordinate

$$(16) \qquad x_0 = H'_1(\varphi) \quad , \quad y_0 = H'_2(\varphi).$$

Si ha subito che la congiungente tale punto con l'origine ha per coefficiente angolare

$$(17) \qquad \frac{H'_2}{H'_1} = \frac{c\cos\varphi - a\operatorname{sen}\varphi}{a\cos\varphi - b\operatorname{sen}\varphi} = \operatorname{tg}\psi$$

è cioè parallela alla direzione della velocità dei punti della retta considerata $y = x \,.\, \operatorname{tg}\varphi$.

Inoltre il luogo dei punti x_0, y_0 al variare di φ è

$$(18) \qquad x^2 + y^2 + V(cx - ay) = 0$$

che rappresenta una circonferenza col centro nel punto $\left(-\frac{cV}{2}, \frac{aV}{2}\right)$ e di raggio $\frac{V}{2}\sqrt{a^2 + c^2}$.

Se dall'origine (centro di velocità nulla) si traccia la parallela alla direzione della velocità dei punti della retta di coefficiente angolare $\operatorname{tg}\varphi$, l'ulteriore punto d'incontro con la circonferenza (18) è il punto (16) relativo a quel valore di φ.

Risulta allora chiaro *il procedimento da seguire quando si voglia trovare il centro di curvatura della traiettoria di un qualunque punto P della figura mobile.*

Congiunto il punto P col centro istantaneo di velocità nulla I si determina l' angolo y e quindi la direzione della velocità dei punti della IP ome direzione coniugata a quella della IP rispetto alla linea di flusso assante per P.

Si traccia la circonferenza (18) (passante per I) e quindi, con la parallela da I alla direzione della velocità di P, il punto (H'_1, H'_2) corrispondente a quell' angolo φ, e da questo punto si traccia la retta (15) che taglierà la retta che contiene il vettore velocità di P in un punto Q tale he $PQ = \frac{v_1^3}{v} = \frac{v^2}{\rho}$. Determinato poi su questa medesima retta il punto Q_1 che disti di v^2 da P_1 è chiaro che basterà congiungere Q col punto alla listanza 1 da P sulla normale alla direzione della velocità e da Q_1 condurre la parallela perchè risulti determinato il centro di curvatura della raiettoria di P.

Non credo inutile notare che il medesimo procedimento può valere del pari nel caso del moto rigido con quelle semplificazioni che risultano ovvie e che provengono dal fatto che nel moto rigido la direzione della velocità di P è perpendicolare alla IP.

NUOVI CONTRIBUTI ALL' ANALISI QUANTITATIVA DEI PROBLEMI DI PROPAGAZIONE

Nota del socio ordinario **Mauro Picone**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Questa Nota sarà inserita in un prossimo fascicolo.

Costruzione di forme invariantive di forme binarie, di 1.°, di 2.° e di 3.° grado, rispetto a forme gruppali di 3.° grado

Nota della prof. **A. Rocco Boselli**, *presentata dal socio ord.* **R. Marcolong**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV).

Sunto. — Nella nota precedente mi sono occupata di forme invariantive di form binarie di 1.°, di 2.° e di 3.° grado, rispetto ad alcune forme gruppali di 1.° e di 2. grado. In questa nota mi trattengo: 1.° Su forme gruppali di 3.° grado, ottenend con calcoli un po' lunghi, che per brevità ometto, risultati semplici, che espong 2.° Metto in rilievo le analogie tra le forme invariantive rispetto alla forma gruppal di n^{mo} grado $(x_0 + x_1)^n$ e la forma gruppale lineare $x_0 + x_1$, fermandomi su var casi particolari.

1. Forme invariantive della forma lineare $\alpha_x = a_0x_0 + a_1x_1$, rispett alla forma gruppale $A = x_0^3 + x_1^3$:

La forma stessa α_x, covariante non speciale; il covariante fondame tale $A = x_0^3 + x_1^3$; il covariante speciale di 2.° grado $(\alpha X) = -3\,(a_1x_0^2 -$ $- a_0x_1^2)$; il covariante speciale di 1.° grado $(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X) = 6\,(a_0^2x_1 + a_1^2x_0$ l'invariante speciale $(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X)\,\Lambda\,(\gamma X) = 6(a_0^3 - a_1^3)$.

2. Forme invariantive della forma lineare α_x, rispetto alla form gruppale $A = x_0^2(x_0 + x_1)$:

$$\alpha_x \;\; ; \;\; A \;\; ; \;\; (\alpha X) = x_0[(a_0 - 3a_1)\,x_0 - 2a_1x_1] \;\; ; \;\; (\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X) = 2[(3a_1^2 - $$
$$- 2a_0a_1)\,x_0 + a_1^2x_1] \;\; ; \;\; (\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X)\,\Lambda\,(\gamma X) = 6a_1^2\,(a_0 - a_1).$$

3. Forma lineare α_x e forma gruppale $A = x_0(x_0 + x_1)^2$. Le form invariantive sono:

$$\alpha_x \;\; ; \;\; A = x_0\,(x_0 + x_1)^2 \;\; ; \;\; (\alpha X) = (2a_0 - 3a_1)\,x_0^2 + 2\,(a_0 - 2a_1)\,x_0x_1 - a_1^2x_1^2$$
$$(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X) = 2\,[(a_0^2 - 4a_0a_1 + 3a_1^2)\,x_0 + 2\,(a_1^2 - a_0a_1)\,x_1] \;\; ;$$
$$(\alpha X)\,\Lambda\,(\beta X)\,\Lambda\,(\gamma X) = -\,6a_1\,(a_0 - a_1)^2.$$

4. Forme invariantive della forma quadratica:

$$a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2 \equiv \alpha_x^2 \equiv \beta_x^2$$

rispetto alla forma gruppale

$$A = x_0^3 + x_1^3:$$

La forma stessa di 2.° grado, α_x^2; l'invariante non speciale $\Delta = a_1^2 - a_2 a_0$; il covariante fondamentale di 3.° grado $A = x_0^3 + x_1^3$; il covariante speciale di 4.° grado $(\alpha X)^2 = \varphi_x^4 = 9(a_0 x_1^4 - 2a_1 a_0^2 x_1^2 + a_2 x_0^4)$; il covariante speciale di 1.° grado $I_x = (\alpha X)^{(2)} = 6(a_0 x_1 + a_2 x_0$; il covariante speciale di 2.° grado $H_x^2 = [(\alpha X) \Lambda (\beta X)]^2 = 36(a_2^2 x_0^2 + 2a_1^2 x_0 x_1 + a_0^2 x_1^2)$; l'invariante speciale $[(\alpha X) \Lambda (\beta X) \Lambda (\gamma X)]^2 = 36(a_0^3 - 2a_1^3 + a_2^3)$.

Tra I, Δ ed H sussiste la relazione

$$H_x^2 = (I_x)^2 + 72 x_0 x_1 . \Delta$$

5. Le forme invariantive della forma quadratica α_x^2, rispetto alla forma gruppale

$$A = x_0^2 (x_0 + x_1)$$

sono:

α_x^2 ; $\Delta = a_1^2 - a_0 a_2$; $A = x_0^2(x_0 + x_1)$; $\varphi_x^4 = (\alpha X)^2 = x_0^2 [(a_0 - 6a_1 + 9a_2) x_0^2 + 4(3a_2 - a_1) x_0 x_1 + 4a_2 x_1^2]$; $I_x = (\alpha X)^{(2)} = 2[(3a_2 - 2a_1) x_0 + a_2 a_1]$; $H_x^2 = [(\alpha X) \Lambda (\beta X)]^2 = 4 [2a_0 a_2 + 9a_2^2 + 2a_1^2 - 12 a_1 a_2) x_0^2 + 2(3 a_2^2 - 2a_1 a_2) x_0 x_1 + a_2^2 x_1^2]$; $[(\alpha X) \Lambda (\beta X) \Lambda (\gamma X)]^2 = 12(3 a_2^3 + a_2^2 a_0 + 2a_1^2 a_2 - 6 a_2^2 a_1)$.

Si noti che la solita relazione tra I, Δ ed H, si riduce a:

$$H_x^2 = (I_x)^2 - 8x_0^2 . \Delta$$

6. Forme invariantive della forma quadratica α_x^2, rispetto alla forma gruppale

$$A = x_0 (x_0 + x_1)^2 :$$

α_x^2 , $\Delta = a_1^2 - a_0 a_2$, $A = x_0 (x_0 + x_1)^2$, $\varphi_x^4 = (4a_0 - 12a_1 + 9a_2) x_0^4 + 4(2a_0 - 7a_1 + 6a_2) x_0^3 x_1 + 2(2a_0 - 10a_1 + 11a_2) x_0^2 x_1^2 + 4(2a_2 - a_1) x_0 x_1^3 + a_2 x_1^4$ $I_x = 2(a_0 - 4a_1 + 3a_2) x_0 + 4(a_2 - a_1) x_1$; $H_x^2 = 4[(a_0^2 + 8a_0 a_2 + 9a_2^2 - 8a_0 a_1 + 14a_1^2 - 24a_1 a_2) x_0^2 + 4(3a_2^2 - 7a_1 a_2 + 2a_0 a_2 - a_0 a_1 + 3a_1^2) x_0 x_1 + 2(a_0 a_2 + 2a_2^2 + a_1^2 - 4a_1 a_2) x_1^2]$; $[(\alpha X) \Lambda (\beta X) \Lambda (\gamma X)]^2 = 12(3a_2^3 + a_0^2 a_2 + 4a_2^2 a_0 + 2a_1^2 a_0 + 14a_1^2 a_2 - 12a_2^2 a_1 - 8a_0 a_1 a_2 - 4a_1^3)$.

Anche qui è:

$$H_x^2 = (I_x)^2 - 8(x_0 + x_1)^2 \Delta$$

7. Forme invariantive della cubica

$$\alpha_x^3 \equiv \beta_x^3 \equiv a_0 x_0^3 + 3a_1 x_0^2 x_1 + 3a_2 x_0 x_1^2 + a_3 x_1^3,$$

rispetto alla forma

$$A = x_0^3 + x_1^3 :$$

I. La forma stessa, di 3.° grado α_x^3.

II. Il covariante, non speciale, di 2.° grado:

$$\Delta_x^2 = 2(a_0a_2 - a_1^2)\,x_0^2 + 2a_0a_3x_0x_1 + 2(a_1a_3 - a_2^2)\,x_1^2.$$

III. Il covariante, non speciale, di 3.° grado:

$$Q_x^3 = (a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + 2a_1^3)\,x_0^3 + 3(a_0a_1a_3 + a_1^2a_2 - 2a_2^2a_0)\,x_0^2x_1 - 3(a_0a_2a_3 + a_1a_2^2 - 2a_1^2a_3)\,x_0x_1^2 - (a_0a_3^2 - 3a_1a_2a_3 + 2a_2^3)\,x_1^3.$$

VI. L'invariante, non speciale:

$$R = 2(6a_0a_1a_2a_3 - 4a_1^3a_3 - 4a_2^3a_0 - a_0^2a_3^2 + 3a_1^2a_2^2).$$

V. Il covariante fondamentale di 3.° grado:

$$A = x_0^3 + x_1^3.$$

VI. Il covariante speciale, di 8.° grado, che si ricava da Δ_x^2:

$$P_x^8 = 9(a_2x_0^6 + a_3x_0^4x_1 - 2a_1x_0^3x_1^2 - 2a_2x_0^2x_1^3 + a_0x_0x_1^4 + a_1x_1^5)(x_0^3 + x_1^3).$$

VII. Il covariante speciale, di 6.° grado:

$$F_x^6 = -27(a_3x_0^6 - 3a_2x_0^4x_1^2 + 3a_1x_0^2x_1^4 - a_0x_1^6).$$

VIII. L'invariante speciale:

$$(\alpha X)\,\mathbf{A}\,(\alpha X)\,\mathbf{A}\,(\alpha X) = 6(a_0 - a_3).$$

IX. Il covariante speciale, di 3.° grado:

$$F_x^3 = 6^3(a_3^2x_0^3 + 3a_2^2x_0^2x_1 + 3a_1^2x_0x_1^2 + a_0^2x_1^3).$$

X. L'invariante speciale:

$$\{(\alpha X)\,\mathbf{A}\,(\beta X)\,\mathbf{A}\,(\gamma X)\}^3 = 6^3(a_0^3 - 3a_1^3 + 3a_2^3 - a_3^3).$$

XI. Il covariante speciale di 9.° grado, che si ottiene da Q_x^3, cambiando α in X:

$$G_x^9 = 9\,[(a_3a_0 - a_1a_2)\,x_0^6 + 2(a_1a_3 - a_2^2)\,x_0^5x_1 + 2(a_1^2 - a_0a_2)\,x_0^4x_1^2 - 2(a_2^2 - a_3a_1)\,x_0^2x_1^4 - 2(a_3a_0 + a_1^2)\,x_0x_1^5 - (a_0a_3 - a_1a_2)\,x_1^6]\,(x_0^3 + x_1^3).$$

XII. Il covariante speciale di 9.° grado, che si ottiene da Q_x^3, cambiando β in X:

$$^{9} = -27\,[a_1 a_2 x_0^{9} + (2a_2^{2} + a_1 a_3)\, x_0^{8} x_1 - (a_0 a_2 + 2a_1^{2} - 3a_2 a_3)\, x_0^{7} x_1^{2} - (8a_1 a_2 + $$
$$+ a_0 a_3 - a_3^{2}) x_0^{6} x_1^{3} - (4a_1 a_3 - 3a_0 a_1 + 5a_2^{2}) x_0^{5} x_1^{4} - (3a_3 a_2 - 4a_2 a_0 - 5a_1^{2}) x_0^{4} x_1^{5} -$$
$$- (a_0^{2} - 8a_1 a_2 - a_0 a_3) x_0^{3} x_1^{6} - (3a_1 a_0 - 2a_2^{2} - a_1 a_3)\, x_0^{2} x_1^{7} - (2a_1^{2} + a_0 a_2)\, x_0 x_1^{8} -$$
$$- a_1 a_2 x_1^{9}].$$

XIII. Il covariante speciale di 9.° grado, che si ottiene da Q_x^3, cam- ...ndo γ in X:

$$^{9} = 3\,[(a_0 a_3 - a_1 a_2)\, x_0^{3} + 2\,(a_1 a_3 - a_2^{2})\, x_0^{2} x_1 - 2(a_2 a_0 - a_1^{2})\, x_0 x_1^{2} - (a_0 a_3 -$$
$$- a_1 a_2)\, x_1^{3}]\, (x_1^{3} + x_1^{3})^{2}.$$

XIV. Il covariante speciale di 6.° grado, che si ottiene dall' inva- ...nte R:

$$^{6} = 27\,[\,(3a_1 a_2 a_3 - a_3^{2} a_0 - 2a_2^{3})\, x_0^{6} + (3a_0 a_2 a_3 - 6a_1^{2} a_3 + 3a_1 a_2^{2})\, x_0^{4} x_1^{2} +$$
$$+ (3a_3 a_1 a_0 - 6a_2^{2} a_0 + 3a_2 a_1^{2})\, x_0^{2} x_1^{4} + (3a_2 a_1 a_0 - a_0^{2} a_3 - 2a_1^{3})\, x_1^{6}].$$

Si noti che:

1.° i covarianti $[(\alpha X)(\beta X)]^3$ e $[(\alpha X)(\beta X)(\gamma X)]^3$ sono rispettivamente 2.ª e la 3.ª potenza del covariante già calcolato $(\alpha X)^3$;

2.° cambiando in Q_x^3, α e γ in X, si ha il covariante $(X\beta)^2 (X\beta)\, X_x^3$, e senza tener conto del fattore effettivo X_x^3 che si stacca, si riduce al ...variante $(X\beta)^3$, già calcolato.

3.° $\quad Q_x^3 (x_0 = -x_1^2 \;,\; x_1 = x_0^2) = \dfrac{1}{27}\, S_x^6 (x_0 \;,\; x_1)$

4.° $\quad \alpha_x^3 (x_0 = x_1^2 \;,\; x_1 = -x_0^2) = \dfrac{1}{27}\, F_x^6 (x_0 \;,\; x_1)$.

8. Forme invariantive d' una cubica, rispetto alla forma gruppale

$$A = x_0^2 (x_0 + x_1):$$

...tre le solite formazioni

$$\alpha_x^3 , \Delta_x^2 , Q_x^3 , R \qquad \text{e} \qquad A = x_0^2 (x_0 + x_1),$$

hanno le altre:

$$_x^{8} = x_0^{2}\,[(9a_2 + a_0)\, x_0^{5} + (6a_2 - 3a_1 + 9a_3)\, x_0^{4} x_1 + 12a_3\, x_0^{3} x_1^{2} + 4a_3\, x_0^{2} x_1^{3}]\,\cdot$$
$$\cdot (x_0 + x_1);\; F_x^{6} = (a_0 + 27a_2 - 9a_1 - 27a_3)\, x_0^{6} + 6\,(6a_2 - a_1 - 9a_3)\, x_0^{5} x_1 +$$
$$+ 12(a_2 - 3a_3) x_0^{4} x_1^{2} - 8a_3 x_0^{3} x_1^{3};\; (\alpha X)^{(3)} = 6\,(a_2 - a_3);\; E_x^{3} = 8[(27a_3^{2} + 18a_2^{2} +$$
$$+ 18a_1 a_3 - 2a_0 a_3 - 6a_1 a_2 - 54a_2 a_3) x_0^{3} + 3\,(9a_3^{2} + 2a_1 a_3 + 2a_2^{2} - 12a_2 a_3)\, x_0^{2} x_1 +$$
$$+ 3(3a_3^{2} + 2a_2 a_3) x_0 x_1^{2} + a_3^{2} x_1^{3}],\; [(\alpha X)\Lambda(\beta X)\Lambda(\gamma X)]^{3} = 8[3a_0 a_3^{2} + 16a_1 a_2 a_3 -$$
$$- 27a_3^{3} + 6a_2^{3} - 18a_1 a_3^{2} + 81a_2 a_3^{2} - 9a_1^{2} a_3 - 54a_2^{2} a_3];\; G_x^{9} = x_0^{2}[3(3a_0 a_3 -$$
$$- 3a_1 a_2 - 2a_0 a_2 + 2a_1^{2})\, x_0^{6} + 2\,(9a_1 a_3 + 4a_1^{2} - 4a_0 a_2 - 9a_2^{2} - 6a_1 a_2 +$$

$+6a_0 a_3) x_0^5 x_1 + (3a_0 a_3 + 30 a_1 a_3 - 30 a_2^2 - 11 a_1 a_2) x_0^4 x_1^2 + 12(a_1 a_3 -$
$- a_2^2) x_0^3 x_1^3 - 5a_2 a_3 x_0^2 x_1^4] (x_0 + x_1)$; $L_x^9 = (a_0^2 + 9a_0 a_2 - 9a_0 a_1 + 18a_1^2 -$
$- 27a_1 a_2) x_0^9 + 3(3a_1^2 - a_1 a_0 - 18a_2^2 + 6a_1 a_2 + 3a_0 a_3 - 9a_1 a_3) x_0^8 x_1 + 3(12a_1 a_2 -$
$- a_0 a_2 - 21 a_2^2 + 3 a_0 a_3 - 27 a_2 a_3 - 6a_1 a_3) x_0^7 x_1^2 + (a_1 a_2 - 18a_2^2 + 2a_0 a_3 -$
$- 117 a_2 a_3 + 53a_1 a_3 - 27a_3^2) x_0^6 x_1^3 + 2(5a_2^2 - 36a_2 a_3 + 3a_1 a_3 - 27a_3^2) x_0^5 x_1^4 -$
$- 12(a_2 a_3 + 3a_3^2) x_0^4 x_1^5 - 8a_3^2 x_0^3 x_1^6$; $M_x^9 = x_0^4 [(3a_0 a_3 - 3a_1 a_2 - 2a_0 a_2 +$
$+ 2a_1^2) x_0^3 + (a_0 a_3 - a_1 a_2 + 6a_1 a_3 - 6a_2^2) x_0^2 x_1 + 4 (a_1 a_3 - a_2^2) x_0 x_1^2] (x_0 + x_1)^2$;
$S_x^6 = 27a_0 a_2 a_3 - 72a_1^2 a_3 + 27a_1 a_2^2 + 3a_0 a_1 a_2 - 2a_1^3 - a_3 a_0^2 - 18a_2^2 a_0 + 9a_1^2 a_2 +$
$+ 9a_0 a_1 a_3 + 81a_1 a_2 a_3 - 27a_0 a_3^2 - 54a_2^3) x_0^6 + 6(6a_2 a_3 a_0 - 8a_1^2 a_3 + 6a_1 a_2^2 -$
$- 2a_2^2 a_0 + a_1^2 a_2 + a_1 a_0 a_3 + 23a_1 a_2 a_3 - 18a_2^3 - 9a_0 a_3^2) x_0^5 x_1 + 6(2a_0 a_2 a_3 -$
$- 4a_1^2 a_3 + 2a_1 a_2^2 + 18a_1 a_2 a_3 - 6a_0 a_3^2 - 12a_2^3) x_0^4 x_1^2 + 8(3a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 -$
$- 2a_2^3) x_0^3 x_1^3$.

Ora, ricordando alcuni risultati ottenuti precedentemente, e considerando altre forme gruppali particolari con punti di multiplicità, voglio mettere in rilievo le analogie trà le forme invariantive rispetto ad una forma gruppale quadrato perfetto e a una forma lineare, oppure a una forma gruppale cubo perfetto e a una forma lineare, oppure a una forma gruppale cubica, con due punti coincidenti e una forma quadratica. Trarrò poi delle conclusioni d'indole generale.

1. Analogie tra le forme invariantive d'una forma lineare α_x, rispetto ad una forma gruppale quadrato perfetto e alla forma lineare base.

Se la forma gruppale rappresenta un punto doppio x_0^2 invece d'un punto semplice x_0, il sistema invariantivo d'una forma lineare α_x, formato di:

$$\alpha_x \quad , \quad A = x_0 \quad , \quad - a_1 \qquad \text{diventa:}$$
$$\alpha_x \quad , \quad A = x_0^2 \quad , \quad - 2a_1 x_0 \quad , \quad 2a_1^2.$$

Se la forma gruppale rappresenta un punto doppio x_1^2, invece d'un punto semplice x_1, il sistema invariantivo di α_x, formato di:

$$\alpha_x \quad , \quad A = x_1 \quad , \quad a_0 \qquad \text{diventa:}$$
$$\alpha_x \quad , \quad A = x_1^2 \quad , \quad 2a_0 x_1 \quad , \quad 2a_0^2.$$

Se la forma gruppale rappresenta un punto doppio $(x_0 + x_1)^2$, invece d'un punto semplice $(x_0 + x_1)$, il sistema invariantivo di α_x formato di:

$$\alpha_x \ , \ A = x_0 + x_1 \ , \ a_0 - a_1 , \qquad \text{diventa:}$$
$$\alpha_x \ , \ A = (x_0 + x_1)^2 \ , \ 2(a_0 - a_1)(x_0 + x_1) \ , \ 2(a_0 - a_1)^2.$$

In ogni caso: *le forme invariantive d'una forma lineare, rispetto ad una forma gruppale quadrato perfetto, sono una combinazione delle forme invariantive della forma lineare, rispetto alla forma gruppale lineare base.*

2. Analogie tra le forme invariantive d'una quadratica binaria α_x^2, rispetto ad una forma gruppale quadrato perfetto e alla forma lineare base.

Se la forma gruppale invece di rappresentare un sol punto x_0, rappresenta un punto doppio x_0^2, le forme invariantive d'una forma quadratica invece di:

$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ x_0\ ,\ a_2 \qquad \text{saranno:}$$
$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ x_0^2\ ,\ 4a_2 x_0^2\ ,\ 2a_2\ ,\ 4a_2^2.$$

Se la forma gruppale invece di rappresentare un sol punto x_1, rappresenta un punto doppio x_1^2, le forme invariantive d'una quadratica invece di:

$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ x_1\ ,\ a_0 \qquad \text{saranno:}$$
$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ x_1^2\ ,\ 4a_0 x_1^2\ ;\ 2a_0\ ,\ 4a_0^2.$$

Se la forma gruppale invece di rappresentare il punto $(x_0 + x_1)$, rappresenta un punto doppio $(x_0 + x_1)^2$, le forme invariantive di α_x^2 invece di:

$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ x_0 + x_1\ ,\ a_0 - 2a_1 + a_2 \qquad \text{saranno}$$
$$\alpha_x^2\ ,\ a_1^2 - a_0 a_2\ ,\ (x_0 + x_1)^2\ ,\ 4(a_0 - 2a_1 + a_2)(x_0 + x_1)^2\ ,\ 2(a_0 - 2a_1 + a_2)\ ,\ 4(a_0 - 2a_1 + a_2)^2.$$

In ogni caso: *le forme invariantive d'una binaria quadratica rispetto ad una forma gruppale quadrato perfetto, sono una combinazione delle forme invariantive della quadratica, rispetto alla forma gruppale lineare base.*

3. Forme invariantive d'una cubica binaria, nel caso in cui la forma gruppale sia un quadrato esatto x_0^2, ovvero x_1^2, ovvero $(x_0 + x_1)^2$.

Nel primo caso le forme invariantive speciali diventeranno:

$$P_x^5 = 4x_0^4(a_2x_0 + a_3x_1)\ ,\ E = 8a_3^2\ ,\ F_x^2 = -8a_3x_0^3\ ,\ G_x^6 = 4x_0^5[(a_0a_3 - a_2a_1)x_0 + 2(a_3a_1 - a_2^2)x_1]\ ,\ L_x^6 = -8x_0^3[a_1a_2x_0^3 + (2a_2^2 + a_1a_3)x_0^2x_1 + 3a_2a_3x_0x_1^2 + a_3^2x_1^3]\ ,\ M_x^6 = 2x_0^5[(a_0a_3 - a_1a_2)x_0 + (2a_1a_3 - 2a_2^2)x_1]\ ,\ S_x^3 = 8x_0^3(2a_1a_2a_3 - a_3^2a_0 - 2a_2^3).$$

Nel secondo caso le forme invariantive saranno:

$$P_x^5 = 4x_1^4(a_0x_0 + a_1x_1)\ ,\ E = 8a_0^2\ ,\ F_x^3 = 8a_0x_1^3\ ,\ G_x^6 = 4x_1^5[2(a_1^2 - a_0a_2)x_0 + (a_1a_2 - a_0a_3)x_1]\ ,\ L_x^6 = 8x_1^3[a_0^2x_0^3 + 3a_0a_1x_0^2x_1 + (a_0a_2 + 2a_1^2)x_0x_1^2 + a_1a_2x_1^3]\ ,\ M_x^6 = -2x_1^5[(2a_0a_2 - 2a_1^2)x_0 + (a_0a_3 - a_1a_2)x_1]\ ,$$
$$S_x^3 = 8x_1^3(3a_0a_1a_2 - 2a_1^3 - a_0^2a_3).$$

Nel terzo caso le forme invariantive sono:

$$P_x^5 = 4(x_0 + x_1)^4[(a_2 + a_0 - 2a_1)x_0 + (a_3 + a_1 - 2a_2)x_1]\ ;\ E = 8(a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3)^3,$$
$$F_x^3 = 8(x_0 + x_1)^3(a_0 - 3a_1 + 3a_2 - a_3)\ ,\ G_x^6 = 4(x_0 + x_1)^4[(a_0a_3 - 2a_0a_2 - a_2a_1 + 2a_1^2)x_0^2 + 2(a_1a_3 - a_0a_2 + a_1^2 - a_2^2)x_0x_1 + (a_1a_2 - a_0a_3 + 2a_1a_3 - 2a_2^2)x_1^2],$$

$L_x^6 = 8(x_0+x_1)^3[(a_0^2+a_2a_0-3a_0a_1-a_1a_2+2a_1^2)x_0^3+(3a_0a_1+8a_1a_2-5a_1^2-$
$-4a_0a_2-2a_2^2+a_0a_3-a_1a_3)x_0^2x_1-(3a_3a_2+8a_1a_2-5a_2^2-4a_3a_1-2a_1^2+$
$+a_0a_3-a_2a_0)x_0x_1^2-(a_3^2+a_1a_3-3a_3a_2-a_2a_1+2a_2^2)x_1^3]$, $M_x^6 = 2(x_0+$
$+x_1)^5[(a_0a_3-a_1a_2-2a_0a_2+2a_1^2)x_0-(a_0a_3-a_1a_2-2a_1a_3+2a_2^2)x_1]$
$S_x^3 = 8(x_0+x_1)^3(3a_1a_2a_3+3a_2a_1a_0-a_3^2a_0-a_0^2a_3-2a_2^3-2a_1^3+3a_0a_2a_3+$
$+3a_3a_1a_0-6a_1^2a_3-6a_2^2a_0+3a_1a_2^2+3a_2a_1^2)$.

4. Forme invariantive d'una cubica α_x^3, rispetto alle forme gruppali $A = x_0$, oppure $A = x_1$, ovvero $A = x_0 + x_1$.

Nel primo caso, oltre le forme non speciali, vi sono le altre:

$A = x_0$, $P_x^2 = x_0(a_2x_0+a_3x_1)$, $F = -a_3$, $G_x^3 = x_0^2[(a_3a_0-a_2a_1)x_0+2(a_3a_1-$
$-a_2^2)x_1]$, $L_x^3 = a_2a_1x_0^3+(2a_2^2+a_3a_1)x_0^2x_1+3a_2a_3x_0x_1^2$, $M_x^3 = x_0^2[(a_0a_3-$
$-a_1a_2)x_0+2(a_1a_3-a_2^2)x_1]$, $S = a_3^2a_0+2a_2^3-3a_1a_2a_3$.

Nel secondo caso si ha:

$A=x_1$, $P_x^2 = x_1(a_0x_0+a_1x_1)$, $F=a_0$, $G_x^3=x_1^2[2(a_1^2-a_0a_2)x_0+(a_1a_2-a_0a_3)x_1]$,
$L_x^3 = a_0^2x_0^3+3a_0a_1x_0^2x_1+(a_0a_2+a_1^2)x_0x_1^2+a_1a_2x_1^3$, $M_x^3 = x_0^2[2(a_0a_2-$
$-a_1^2)x_0+(a_0a_3-a_1a_2)x_1]$, $S = 3a_3a_1a_2-2a_1^3-a_0^2a_3$.

Si noti che le forme, nel secondo caso, si ottengono da quelle del 1.° caso, scambiando x_0 con x_1, a_0 con a_3, a_1 con a_2, a meno del segno.

Nel terzo caso si ha:

$A = x_0+x_1$, $P_x^2 = (x_0+x_1)[(a_2+a_0-2a_1)x_0+(a_3+a_1-2a_2)x_1]$, $F = a_0-3a_1+$
$+3a_2-a_3$, $G_x^3 = (x_0+x_1)[(a_0a_3-2a_2a_0-a_3a_1+2a_1^2)x_0^2+2(a_3a_1-a_0a_2+$
$+a_1^2-a_2^2)x_0x_1-(a_0a_3-2a_1a_3-a_1a_3+2a_2^2)x_1^2$, $L_x^3 = (a_0^2+a_2a_0-3a_0a_1-$
$a_1a_2+2a_1^2)x_0^3+(3a_0a_1+8a_1a_2-5a_1^2-4a_0a_2-2a_2^2+a_0a_3-a_1a_3)x_0^2x_1-$
$-(3a_3a_2+8a_1a_2-5a_2^2-4a_3a_1-2a_1^2+a_0a_3-a_2a_0)x_0x_1^2-(a_3^2+a_1a_3-3a_3a_2-$
$-a_2a_1+2a_2^2)x_1^3$, $M_x^3 = (x_0+x_1)^2[(a_0a_3-a_1a_2-2a_0a_2+2a_1^2)x_0-(a_0a_3-$
$-a_1a_2-2a_1a_3+2a_2^2)x_1]$, $S=3a_1a_2a_3+3a_1a_2a_0-a_3^2a_0-a_0^2a_3-2a_2^3-2a_1^3+$
$+3a_0a_2a_3+3a_3a_1a_0-6a_1^2a_3-6a_2^2a_0+3a_1a_2^2+3a_2a_1^2$.

5. Dai risultati precedenti si ricava senz'altro che: Se la forma gruppale A invece di essere lineare, cioè di rappresentare un sol punto (x_0+x_1) (oppure x_0, oppure x_1), rappresenta due punti coincidenti $(x_0+x_1)^2$ (oppure x_0^2, oppure x_1^2), *le forme invariantive d'una cubica generica, riferite ad un gruppo quadrato perfetto, sono combinazioni delle forme invariantive rispetto alla corrispondente forma gruppale lineare base.*

6. Se la forma gruppale è $x_0(x_0+x_1)$, le forme invariantive d'una forma lineare α_x sono:

$$\alpha_x\ ,\ x_0^2(x_0+x_1)\ ,\ (a_0-2a_1)x_0-a_1x_1\ ,\ 2a_1(a_1-a_0).$$

Se la forma gruppale è $x_0^2(x_0+x_1)$, le forme invariantive sono:

$$\alpha_x, \; x_0^2(x_0+x_1), \; x_0[(a_0-3a_1)x_0-2a_1x_1], \; 2[(3a_1^2-2a_0a_1)x_0+a_1^2x_1], \; 6a_1^2(a_0-a_1).$$

Se la forma gruppale è $x_0(x_0+x_1)^2$, le forme invariantive sono:

$$\alpha_x \;, \; x_0(x_0+x_1)^2 \;, \; (2a_0-3a_1)x_0^2+2(a_0-2a_1)x_0x_1-a_1^2x_1^2 \;, \; 2(a_0^2- \\ -4a_0a_1+3a_1^2)x_0+2(a_1^2-a_0a_1)x_1] \;, \; -6a_1(a_0-a_1)^2,$$

, come si vede, *non essendo possibile lo scambio dei due punti, nel caso n cui uno sia doppio e l'altro semplice, il sistema invariativo d'una orma lineare si arricchisce, quando si passa dalla forma gruppale* $A = x_0(x_0+x_1)$, *alle forme gruppali* $x_0^2(x_0+x_1)$ *o* $x_0(x_0+x_1)^2$.

Se la forma gruppale è $A = x_0 + x_1$, il sistema invariantivo di α_x è α_x, x_0+x_1, a_0-a_1 e se la forma gruppale é $(x_0+x_1)^3$, il sistema invariantivo diventa:

$$\alpha_x \;, \; (x_0+x_1)^3 \;, \; 3(a_0-a\;)(x_0+x_1)^2 \;, \; 6(a_0-a_1)(x_0+x_1) \;, \; 6(a_0-a_1)^3$$

 cioè queste ultime formazioni sono combinazioni delle prime.

Analoghi risultati, con calcoli più lunghi, ho trovato per la forma quadratica e per la forma cubica. Per brevità non li espongo.

7. *In generale.*

Se la forma gruppale è $(x_0+x_1)^n$, le formazioni invariantive d'una binaria d'un grado qualsiasi, sono combinazioni delle formazioni invariantive della stessa binaria, quando la forma gruppale sia un punto semplice. La ragione sta nel fatto che se la forma gruppale è

$$A = (x_0+x_1)^n \;,$$

le derivate dello stesso ordine sono tutte eguali fra loro, ovvero

$$X_0 = X_1 = n(x_0+x_1)^{n-1}, \; X_0^{(2)} = X_0 \wedge X_1 = X_1 \wedge X_0 = X_1^{(2)} = n(n-1)(x_0 + \\ + x_1)^{n-2}, \; X_0^{(3)} = X_0 \wedge X_1^{(2)} = X_1^{(2)} \wedge X_0 = X_0^{(2)} \wedge X_1 = X_1 \wedge X_0^{(2)} = X_1^{(3)} = \\ = n(n-1)(n-2)(x_0+x_1)^{n-2} \text{ ecc.}$$

e perciò nelle formazioni invariantive relative alla forma gruppale $A = (x_0+x_1)^n$, si può sempre mettere in evidenza un fattore comune, che è una potenza di (x_0+x_1), e la parte rimanente sarà una combinazione delle formazioni invariantive relative ad $A = x_0 + x_1$.

Per esempio, per la forma quadratica α_x^2 e la forma gruppale $(x_0+x_1)^n$, le forme invariantive sono:

$$\alpha_x^2 \;, \; a_0 - a_1a_2 \;, \; (x_0+x_1)^n,$$

$\varphi_x^{n-2} = (\alpha X)^2 = (\alpha_0 X_1 - \alpha_1 X_0)^2 = [\alpha_0 n (x_0 + x_1)^{n-1} - \alpha_1 n (x_0 + x_1)^{n-1}]^2 = n^2 (x_0 + x_1)^{2n-2} (\alpha_0 - \alpha_1)^2 = n^2 (x_0 + x_1)^{2n-2} (\overline{\alpha X})^2$, dove $(\overline{\alpha X})^2$ è la forma corrispondente $\varphi = a_0^2 - 2a_1 + a_2$, relativa alla forma gruppale $A = x_0 + x_1$
$I_x^{n-2} = (\alpha X)^{(2)} = [\alpha_0^2 X_1^{(2)} - 2\alpha_0\alpha_1 X_0 \mathbf{A} X_1 + \alpha_2 X_0^{(2)}] = a_0 n (n-1)(x_0 + x_1)^{n-2} - 2a_1 n (n-1)(x_0 + x_1)^{n-2} + a_2 n (n-1)(x_0 + x_1)^{n-2} = n(n-1)(x_0 + x_1)^{n-2}(a_0 - 2a_1 + a_2) = n(n-1)(x_0 + x_1)^{n-2}(\overline{\alpha X})^2$,
$H_n^{2n-4} = [(\alpha X) \mathbf{A} (\beta X)]^2 = [(\alpha_0 X_1 - \alpha_1 X_0) \mathbf{A} (\beta_0 X_1 - \beta_1 X_0)]^2 = [\alpha_0\beta_0 X^{(2)} - (\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) X_1 \mathbf{A} X_0 + \alpha_1\beta_1 X_0^{(2)}]^2 = n^2(n-1)^2(x_0 + x_1)^{2n-4} [\alpha_0\beta_0 - (\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1) + \alpha_1\beta_1]^2 = n^2(n-1)^2 (x_0 + x_1)^{2n-4}. [(\alpha_0 - \alpha_1)\beta_0 - (\alpha_0 - \alpha_1)\beta_1]^2 = n^2(n-1)^2(x_0 + x_1)^{2n-4}(\alpha_0 - \alpha_1)^2 (\beta_0 - \beta_1)^2 = n^2(n-1)^2(x_0 + x_1)^{2n-4} [(\overline{\alpha X})^2]^2$,
$[(\alpha X) \mathbf{A} (\beta X) \mathbf{A} (\gamma X)]^2 = [\alpha_0\beta_0\gamma_0 X_1^{(3)} - \alpha_0(\beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0) X_1 \mathbf{A} X_1 \mathbf{A} X_0 + \alpha_0\beta_1\gamma_1 \mathbf{A} X_0^{(2)} - \alpha_1\beta_0\gamma_0 X_0 \mathbf{A} X_1^{(2)} + \alpha_1(\beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0) X_0 \mathbf{A} X_1 \mathbf{A} X_0 - \alpha_1\beta_1\gamma_1 X_0^{(3)}]^2$,

e oltre il fattore $n^2 (n-1)^2 (n-2)^2 (x_0 + x_1)^{2n-6}$, che si può mettere in evidenza, si ha l'altro:

$[\alpha_0\beta_0\gamma_0 - \alpha_0\beta_0\gamma_1 - \alpha_0\beta_1\gamma_0 + \alpha_0\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_0\gamma_0 + \alpha_1\beta_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_1\gamma_0 - \alpha_1\beta_1\gamma_1]^2 = [\alpha_0\beta_0(\gamma_0 - \gamma_1) - \alpha_0\beta_1(\gamma_0 - \gamma_1) - \alpha_1\beta_0(\gamma_0 - \gamma_1) + \alpha_1\beta_1(\gamma_0 - \gamma_1)]^2 = (\gamma_0 - \gamma_1)^2 [\alpha_0(\beta_0 - \beta_1) - \alpha_1(\beta_0 - \beta_1)]^2 = (\alpha_0 - \alpha_1)(\beta_0 - \beta_1)^2(\gamma_0 - \gamma_1)^2 = [(\overline{\alpha X})^2]^3$.

Perciò:

$$[(\alpha X) \mathbf{A} (\beta X) \mathbf{A} (\gamma X)]^2 = n^2(n-1)^2(n-2)^2(x_0 + x_1)^{2n-6}[(\overline{\alpha X})^2]^3$$

e così via. In generale se $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(i)}$ sono simboli equivalenti, si avrà

$$[(\alpha^{(1)} X \mathbf{A} \alpha^{(2)} X) \ldots \mathbf{A} (\alpha^{(i)} X)]^2 = n^2(n-1)^2 \ldots (n-i+1)^2 (x_0 + x_1)^{2(n-i)} [(\overline{\alpha X})^2]$$

e si potrà arrivare, per il teorema III, (nota precedente) fino a:

$$[(\alpha^{(1)} X)(\alpha^{(2)} X) \ldots (\alpha^{(n)} X)]^2 = (n!)^2 [(\overline{\alpha X})^2]^n$$

Quest' ultima formazione invariantiva, per il teorema V (nota precedente), è un invariante.

Rapporti tra i fenomeni del vulcanismo e la formazione dei centri e variazione della popolazione nell' isola d' Ischia

Nota della prof. **Gina Algranati,** *presentata dal socio corr.* **C. Colamonico**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — L' Autrice ha studiato i rapporti tra i fenomeni del vulcanismo e la formazione dei centri e la variazione della popolazione nell' isola d' Ischia; considerando la prevalente influenza che hanno avuto le eruzioni sulla determinazione e lo spostamento degli abitati; la scarsa influenza del bradisismo e delle fonti termali; l' importanza che hanno avuto i terremoti nel determinare il paesaggio e la topografia degli abitati.

Introduzione. — A continuare la zona dei Campi Flegrei, sorge, in un limitato specchio d' acqua, il gruppo delle isole, che già interessanti per la loro genesi, presentano le più diverse caratteristiche antropogeografiche; la popolosa Nisida, densissima Procida, deserta Vivaro, ricca di risorse Ischia; e ciascuna associa alla costituzione del suolo un particolare carattere degli abitanti, il quale determina la fisonomia economica dell'isola. Quella che in sè accoglie maggior numero di fenomeni è l' « insula maior », Ischia.

Il destino di tutte è legato alla loro origine vulcanica, però Procida, Vivaro e Nisida, ebbero un assestamento relativamente rapido, mentre Ischia fu a lungo soggetta ai fenomeni primari e secondari del vulcanismo, a la massima parte dei quali soggiace tuttora.

Si è voluto avvicinare la figura del suo contorno a quella del femore, può in esso essere g r o s s o m o d o inscritto un trapezio irregolare, i cui vertici corrispondono alle punte Imperatore, Caruso, Molino e Cornacchia.

La massa centrale dell'isola è dominata dal monte Epomeo alto m. 789 sul livello del mare. Si vuol parlare di questa vetta come del vulcano dell' isola, mentre esso invece non è che la più alta punta di una cresta tufacea [1]), che si alza per un'area di circa 2 kmq. e sopra la base di un

[1]) Lo studio recente del Rittman: *Geologie der Insel Ischia, Berlin 1930*, chiarisce questa evidente realtà: « Der Epomeohorst ist der gehobene und isoklin gekippte Sudostquadrant eines submarinen Vulkan, dessen Forderschlot an der Stelle des Monte Nuovo liegt » pag. 81. Il che, come egli stesso ricorda era stato avvertito fin dal 1809 da Leopold von Buch « Der Epomeo ist kein vulkanischer Kegel, . . . der Gipfel zeigt auch nicht was einem Crater änlich wäre ». Ischia. Moll's Jakrbuch für Berg-und Hüttenkunde, I, pag. 343, Nürnberg, 1809.

triangolo curvilineo concavo, con una serie di cime e dossi, per un'altezza media di circa 700 m. s. m. La cresta si stende dal nodo centrale dell'Epomeo, (cima di S. Nicola), ad est, secondo una linea ondulata a forma di doppia falce lunare, la prima con convessità a nord, la seconda a sud, e si rialza nella Montagna Bianca (714), nella punta di Jetto (665) e nel colle di Jetto (589); verso sud ovest si solleva nella Pietra del Cantariello (704), la Pietra dell'Acqua (721) e la Rocca di Serra (558); altra propaggine si solleva a nord della cima di S. Nicola nel M. Bianchetto (721) e nella Rocca della Frana (412) ed altra ad ovest nella Montagna Nuova (510) e nel Toppo (293).

Da questa breve e accidentata giogaia, che si svolge secondo direzioni partenti dal nodo dell' Epomeo, si discende dapprima per rupi scoscese e pendii franosi, indi per colli, crateri, e campi di lava verso le coste.

La massa dell'Epomeo è poggiata assai più verso ovest che verso est, sicchè il versante occidentale è ripido ed angusto, e la costa fra Punta Caruso e la Punta Imperatore, battuta dai venti del quarto quadrante e soggetta alle mareggiate frequenti, è di difficile approdo. La costiera meridionale, fino alla Punta Chiarito, è orlata di rupi alte e scoscese (Scarrupo), e cinge una vasta piattaforma di pomici e lapilli distesi intorno al cratere del Campotese; dal Promontorio di S. Angelo alla Punta della Signora si apre, per oltre un kilometro e mezzo, la marina dei Maronti, con una spiaggia assolata e mineralizzata; dalla Punta della Signora alla Punta S. Pancrazio la costa si risolleva nuovamente nella Scaruppata di Barano, alta sul mare 100-200 metri e in qualche punto oltre i 200.

Una serie di dossi divide il versante meridionale, che s' affaccia a questa costa, da quello nordorientale, il più ampio dei tre. Il versante meridionale è inciso dalla massima parte dalle « cave »; questi solchi che discendono lungo i fianchi dell' Epomeo, in picciol numero tra Casamicciola e Lacco (Cava del Monaco, Cava la Rita, del Petrone, Puzzillo, Fasaniello, Fontana) e in maggior numero e più ampi verso i Maronti e lo Scarupo di Serrara (Cava di Terzano, Cava del Ponte, Cava dell'Acquara, e quelle di Pagliarito, Piscinella, Curtodonni, Bosco, Posteca, Calimei, Funnina, Scura, Petrella....) sono vallette incise a pareti rocciose e fondo alluvionale, invase dalle acque minerali e convoglianti le piovane. Fra i dossi, in cui prevalgono trachiti e basalti, sono preminenti il M. Treppodi (521) e la Selva del Napolitano (401), dalla quale, pel monte dei Vezzi (395), si degrada fino alla Punta di S. Pancrazio.

Il versante nordorientale, spazioso e dolcemente ondulato, scende verso una costa bassa, con tratti sabbiosi, rialzata qua e là da campi di lava (Arso, Molino, Punta della Scrofa, Promontorio di Zara) e segnata da speroni tufacei.

I tre versanti, così individuati possono considerarsi ben differenziati. Essi misurano:

Versante			
Versante	meridionale	kmq.	18.23
»	occidentale	»	8.92
»	nordorientale	»	19.18
		kmq.	46.33

Le acque che per essi discondono al mare, trasportano depositi minuti, e la mancanza dei greti è una delle condizioni delle coste isolane.

Spostamento dei centri abitati e variazioni della popolazione in rapporto al vulcanismo.

Gli insediamenti umani hanno, nell'isola d'Ischia, fin dai tempi lontani della colonizzazione greca, una dipendenza diretta dai fenomeni vulcanici: eruzioni, terremoti, bradisismi, acque termali. Questi rapporti sono variabili e si riferiscono, quando al crearsi o allo spostamento dei centri, quando al fluttuare del numero degli abitanti, quando al determinarsi delle loro occupazioni.

La posizione dell'isola, il suo clima, la feracità del suolo, la presenza di facili approdi, determinano in un primo tempo la scelta dei coloni; ma così questi, come i successivi abitatori del luogo, sono soggetti ad una serie di movimenti; espansione, accentramenti, fughe, ritorni, spostamenti le cui cause sono da ricercarsi esclusivamente nei fenomeni dovuti alla natura del suolo.

Eruzioni. — Tra i fenomeni del vulcanismo soltanto le eruzioni hanno cessato, da oltre sei secoli, la loro attività. Le prime, che squarciarono il fondo submarino del golfo, diedero origine all'isola, la quale, emersa alfine stabilmente, non ebbe però riposo, e nuove convulsioni la squassarono.

Il numero delle eruzioni storiche è variabile, a seconda degli autori. Una eruzione preistorica sarebbe quella di cui il Ritmann individua il cratere nel Campotese, giustificando questa sua opinione col fatto che sotto i tufi del Campotese stesso il Friedlaender ritrovò un manufatto neolitico [1]), onde l'eruzione si accuserebbe esser più giovine di questo relitto; scarsa prova, ma non priva di valore.

Delle eruzioni storiche abbiamo notizie in Strabone e Plinio per l'antichità, indi in Julius Obsequens; di alcune fa cenno il Capaccio, di un'ultima ci lasciano memoria Giovanni Pontano e Francesco Lombardi; molti altri autori derivano dai precedenti.

Narra Strabone come in Pitecusa (antico nome dell'isola, detta anche Inarime ed Enaria) fossero frequenti eruzioni, terremoti, maremoti e sor-

---

[1]) *Op. cit.*, pag. 134.

give calde e aggiunge, riferendolo da Timeo, che i Calcidesi e gli Eritresi, ivi dimoranti, furono dai terremoti scacciati come più tardi i Siracusani di Gerone, che furono costretti ad abbandonare la iniziata costruzione di un muro (Libro V, Capo IX). PLINIO (Libro II, Capo 88) ci tramanda:

« Sic et Pythecusas in Campano sinu ferunt ortas mox in his montem Epopon cum repente flamma ex eo emicavisset, campestri aequatum platinie. In eadem et oppidum haustum profundo alioque motu terrae stagnum emersisse et alio provolutis montibus insulam extitisse Prochytam ».

La interpretazione di questi passi non trova concordi gli studiosi. Il FUCHS [1]) nella descrizione di STRABONE intravvede ben tre eruzioni; non così il MERCALLI [2]) ed il RITTMANN. Ma la tradizione e la storia devono appoggiarsi allo studio diretto del terreno, dall'esame del quale non è però da attendersi la certezza cronologica. Il terreno accusa numerosi crateri, visibile e completo qualcuno, altri ricoperti di scorie, o erosi, o franati in parte; i più giovani risultano essere quelli del Rotaro e i tre disposti lungo una linea unica; Vateliero, Molara, Cava Nocelle [3]).

A nessuno di questi ultimi adunque dovrebbero essere attribuite le più antiche eruzioni, delle quali unicamente sappiamo che *fugarono i coloni*.

Ora i primi coloni a popolare l'isola e ad esser fugati furono gli Eritresi e i Calcidesi; a distanza di secoli il tiranno GERONE, dal quale prese il nome il castello durante il medioevo, e che si vuole fosse il primo personaggio storico che avesse fruito delle acque termali isolane, occupò l'isola, ma anche i suoi dovettero abbandonarla; una terza ondata di abitatori fu costituita dal ritorno dei primi coloni, che dopo aver fondata Cuma, tornarono ad impossessarsi dell'isola [4]) ed una quarta dai Campani di Napoli che dopo la morte di Aristodemo e la decadenza di Cuma, presero l'isola in loro dominio [5]).

La permanenza degli Eritresi e dei Calcidesi sarebbe indicata dalla toponomastica locale, che ci conserva una contrada Negroponte ed una Tresta (Eritresta) e si vorrebbe dedurne una separazione nei centri dei

---

[1]) Mem. Comit. geolog. ital., 1873.

[2]) *I terremoti e le eruzioni dell' isola d' Ischia*. Rassegna Nazionale, Firenze, 1881.

[3]) RITTMAN, *Op. cit.*, pag. 130.

[4]) BELOCH., *Campanien*. Breslau, 1890, passim.

[5]) SCHIPA M., *Storia del ducato napoletano*. Napoli, 1895 « Cuma decadde nel V secolo, dopo la morte di Aristodemo. E allora Napoli fiorì, s'impadronì d' Ischia, che apparteneva ai Cumani ed era stata poi occupata ed abbandonata dai Siracusani » pag. 5; V. anche PAIS E., *Per la storia di Napoli e d' Ischia nell' età sillana*. Mem. Acc. arch. lett. e belle arti, Napoli 8 maggio 1900.

ue gruppi, e la determinazione delle occupazioni; gli Eritresi si sarebbero fatti vignaiuoli e i Calcidesi, valenti artefici nel foggiare vasi di creta vrebbero per la loro industria utilizzata l'argilla del luogo.

Ma questa separazione sarebbe, se mai, venuta in un secondo tempo; l primo centro della colonizzazione fu — come testimonianze archeologiche i alto valore attestano — il pianoro che sovrasta M. Vico [1]; donde poi i stabilirono nella piana dell'odierna Lacco e verso i luoghi oggi occuati da Casamicciola; questi due centri sono adunque i più antichi. Ma una mmane eruzione fugò i coloni e li spinse sulla opposta sponda a fondare Cuma [2]. Così l'isola fu depopolata affatto e rimase in preda alla conflagrazione, mentre Cuma doveva il sorgere suo alle forze distruttrici della erra.

Donde scaturì questa eruzione? Forse dalle bocche del Montagnone Maschiatta, ai cui piedi si formava, con un cratere nuovo, il lago, oggi porto d'Ischia, lo «stagnum» pliniano? Incertezza regna, e il RITTMAN stesso non crede vi sia sicurezza di localizzazione [3].

Maggior certezza invece abbiamo del luogo donde eruppe la seconda conflagrazione, che discese dal Marecoco. L'eruzione trovò stabiliti nell'isola, dopo un periodo di abbandono, i Siracusani di Gerone, intenti a fortificare mediante un muro. Questo muro non va confuso con quello del M. Vico, recante una antica discussa iscrizione, opera di più tarda età, come vedremo, ma secondo ogni probabilità con quello di cui si vuole restasse traccia sul promontorio di Castiglione. Il Castiglione sarebbe dunque il secondo centro sorto nell'isola; e non è improbabile che con esso fosse abitato l'isolotto dove sorse il castello e che costituì sempre la rocca forte per la difesa dell' isola.

Così almeno ci tramanda la tradizione. Potrebbe ancora darsi che la colonizzazione siracusana fosse penetrata nell'interno e che il nome di Calimera, oggi attribuito ad un casale di Serrara Fontana e quello di Calimei ad una cava della stessa località, ne fossero la prova.

Fugati i Siracusani, l'isola restò una seconda volta deserta, finchè i Greci di Cuma non tornarono a popolarla; la contrada Cumana o Chiummano ne conserverebbe il ricordo nel nome. I Cumani si spinsero nuovamente a popolare il M. Vico e ai piedi di quello utilizzarono le sorgenti di alto valore medicamentoso, erigendo terme di cui sono ancora visibili i resti [4]). Questa seconda eruzione ebbe un' importanza particolare nella configurazione isolana e nella conseguente vita degli abitatori; dalla zona del Marecoco le lave discesero a raggiungere il mare e formarono il pro-

---

[1]) V. ancora BELOCH, *Op. cit.* e ALGRANATI — *Ischia* — Bergamo, 1930.

[2]) BELOCH, Op. cit.

[3]) *Op. cit.*, pag.130.

[4]) ALGRANATI, *Op. cit.* pag. 42 e 43.

montorio di Zara, vasta massa emergente dalle onde, calcolata dal RITTMAN in circa 100 milioni di metri cubi e distesa per circa un kmq. di superficie, la quale, raffreddandosi, e sporgendo con giganteschi blocchi, chiuse ad oriente il seno, detto oggi di S. Montano e creò una larga rada che offrì alle piccole imbarcazioni del tempo adatto riparo [1]) e diede insieme origine ad un vallone incassato tra Zara e M. Vico (alti entrambi poco più di 100 m. s. m.) che migliorò l'accesso verso l'acropoli di M. Vico.

Su di esso infatti anche i Campani di Napoli posero una delle loro sedi, dominante il solo sicuro porto dell'isola. Anch'essi alzarono un baluardo, fatto barbaramente saltare alcuni decenni or sono, per utilizzarlo nella tonnara e che recava una iscrizione, fortunatamente raccolta e studiata [2]); essa assicurava che *Pacco figlio di Ninfio e Maio di Paquulus costruirono il muro.* Dopo varie ipotesi, una attenta lettura, cui ha particolarmente contribuito il BELOCH, valse a stabilire che la costruzione deve appunto attribuirsi al periodo della dominazione campana.

Ora, diciamo, questo muro dei cui autori ci fu conservato il ricordo, non doveva forse essere il principio di una fortificazione? altrimenti a quale scopo sarebbe stato eretto? E se questa ipotesi è accettabile, non deve supporsi che ancora una volta l'opera iniziata sia stata interrotta dall'erompere del fuoco, e che le eruzioni abbiano nuovamente in quel periodo scolvolta e deserta l'isola?

E se il Rotaro « il meglio conservato vulcano dell'isola » [3]) ebbe replicate emissioni di lava, non potrebbe darsi che l'ultima fosse quella che rappresenta la terza eruzione?

Le altre dovrebbero quindi essere attribuite, perchè più recenti, ai tre vulcani di Vateliero, Molara [4]) Cava Nocelle.

Esse sarebbero, quella di cui ci narra Julius Obsequens [5]) che sarebbe avvenuta essendo consoli L. Troso e P. Tarquinio, nell'89 a. C. (Aenaria terrae hiata flamma exorta) e le tre cui accenna il CAPACCIO [6]), che ebbero luogo regnando Tito la prima (79-80 a. C.), regnando Antonino Pio la seconda (136-161) e al tempo di Diocleziano la terza (204-305).

Il RITTMAN ne porrebbe appunto i centri nei tre giovani crateri [7]).

---

[1]) Riferiamo la tradizione che vuole fosse ivi approdato Enea.

[2]) MOMMSEN, C. I. G., n. 5861.

[3]) RITTMAN, *Op. cit.*

[4]) Il nome di Molara è attribuito anche ad una frazione di Barano ed è dovuto al fatto che forniva pietre da mola. JASOLINO Giulio. *Dei rimedi naturali che sono nell' isola di Pitecusa.* Napoli, 1588.

[5]) *Obsequentis Julii Prodigiorum liber.* Basileae, 1552.

[6]) CAPACCIO G. C., *La vera antichità di Pozzuoli*, Roma 1562.

[7]) *Op. cit.*, pag. 37-40.

Di queste ultime però abbiamo malcerte fonti e nessuna notizia intorno i conseguenti movimenti della popolazione.

Chiare e sicure notizie ci restano invece della ultima eruzione e degli nportanti movimenti di popolazione cui diede origine.

Dopo circa mille anni di silenzio, il fuoco si ridestò e nel 1301, duante il periodo angioino — era re Carlo II lo zoppo — « repente ruptis isceribus terrae » — ci narra Gioviano PONTANO nel sesto libro del *De ello neapolitano* [1] — venne fuori in una conflagrazione non seconda alle recedenti per vastità ed importanza, una quantità ingente di sassi comista a polvere, a fiamme, a vapori, che fu gettata in alto; un torrente i lave sgorganti dal cratere detto oggi dell'Arso, invase per la lunghezza i poco meno di tre chilometri una contrada intera, devastandola, diseminandola di scorie porose e di pomici, e, raggiunto il mare, vi creò 'unta Molino.

Tutta la contrada prese il nome di Arso o Cremato (bruciato), che ncor oggi spoglio in parte, in parte popolato di conifere, mostra a nudo le rme dei massi lavici e delle bizzarre scorie. Più largamente ci descrive l LOMBARDI l'eruzione del 1301:

« Olim sub Carulo II anno 1301 exiite terrae venis ignis sulphureus, ui magnam ipsius insulae partem combussit. Ex quo ignis multi homines t quampluria animalia perierunt; duobus fere mensibus devoravit inendium. Multi et illis derelicta insula ad Prohitem, Capreas, Baias, Pueolos et Neapolim confugerunt. Huius ignis vestigia usque ad hodiernum iem remanet nec in eadem loco herba vel quidpiam vitens nascitur. Per uo fere miliaria in longitudine et per medio in latitudine, vulgo dicitur e Cremate » [2]).

Un ragguaglio istorico topografico di cui già diedi cenno in una breve omunicazione [3]) e più ampio conto in altro scritto [4]), ragguaglio dovuto

---

[1]) *De bello neapolitano*, Napoli, 1509.

[2]) *Synopsis eorum quae de balneis, aliisque miraculis puteolanis sunt.* Venezia, 559. Andrea BACCIO — *De thermis* — Venetiis, 1571, pone Ischia tra le isole *quae rdent per tempora*; e continua: Rariis autem conflagrat Aenaria. Anno tamen salutis umanae MCCCI regnante Carulo Neapolis ac Siciliae Rege conflagravit mirandum n modum plures menses ac ex eo tempora relicta diu, et concremata infoecunda ona parte ex visitur, vinorum insignis generositate ac balneis calidis ac plurifariam nedicatis (pag. 206). E l' Elisio — Johanni Elisii Libellus de mirabilibus civi/tatis ureolorum et lo/corum vicinorum ac de nominibus vir/tutibusque balneo/rumiidem exi/stentium/s. a. raro, parafrasa nel capitoletto — De combustione insule [sole — il Pontano.

[3]) *Variazioni della costa dell' Isola d' Ischia negli ultimi secoli attraverso documenti torici.* Atti dell'XI Congresso geogr. it., Vol. II pag. 345.

[4]) ALGRANATI, *Ischia*, Bergamo, 1930, pag. 62-64.

ad un dotto conoscitore di cose locali, nativo di Forio, nota come dai documenti dell'archivio storico di Napoli, risulti la continuazione dell'eruzione attraverso gli anni 1302 e 1303, ma si tratta evidentemente di fenomeni sporadici e di limitata importanza [1].

Immune, isolato restava lo scoglio ovale, imponente massa trachitica, sul quale sorse il castello, che non ebbe danni dai terremoti e che rappresentava, per esser distaccato dall'isola per un braccio di mare di circa 200 metri, il solo luogo di sicura dimora Gran parte della popolazione era fuggita verso le isole vicine e i lidi campani, ma se l'isola fu derelitta, si popolò l'isolotto; non solo dal borgo marinaro, ma da tutti i borghi e villaggi lontani accorsero gli abitanti a raccogliervisi e rapidamente lo popolarono, arricchendolo via via di edifici, di chiese, di botteghe. Fu creato così un nuovo stanziamento, che divenne la vera e propria città d'Ischia, e di città conservò il nome fino ai primissimi dell'800 [2].

Gli abitatori si accrebbero, sorsero monasteri; si ebbero sull'affollata roccia numerose chiese; la cattedrale costruita nel secolo stesso, si arricchì di opere d'arte, non tutte disperse, dovute al periodo angioino e alla munificenza dei Cossa, che furono signori del castello [3]. La città prese il nome di Gerunda o Geronda [4]) ed anche di Ischia mi-

[1]) Il manoscritto è anonimo, ma l'autore appare nel contesto, per notizie da me assunte sul luogo e ricerche nei libri parrocchiali, essere il sacerdote Domenico Verde.

[2]) Algranati, *Ischia* ecc., pag. 64. Il Pascale — *Descrizione storico-topografico-fisica delle isole del Regno di Napoli*, 1796, pag. 51, narra che il vescovo pretese le decime e, che, nonostante la triste loro situazione, per ordine reale gli abitanti dovettero pagare.

[3]) Li Cossa o Salvacossa andarono di Roma in Ischia et ebbero origine, come vogliono, da Cornelio Cosso Romano Console con Marco Asinio negli anni di Christo 28.

Di questa famiglia ricca, potente e temuta signora anche di Procida e « di molte galere » e per mare peritissima, fu Baldassarre, eletto papa nel 1410 col nome di Giovanni XXIII; in « *La Nobiltà di Napoli* » del Reverendo Padre fra Luigi Contarino dell'ordine dei Cruciferi. Fa parte della « *Raccolta di uarii libri ovvero opuscoli d'historie del Regno di Napoli di varii et approbati autori* ». Napoli, 1600.

V. anche Algranati, *Ischia*, Bergamo 1930. pag. 72.

[4]) « Gerunda » voce antichissima addetta a denominare e divisare il castello d'Ischia e l'isola d'Ischia, e sin dal tempo che Jerone re di Siracusa mandò nella stessa, una colonia di siracusani per abitarla. E altrove « Geronda, Girunda, Gerona » additavano l'isola ed in particolare il castello. « Ragguaglio ». Gli storici del Regno di Napoli consacrano in generale la stessa notizia.

E così l'Jasolino, *Op. cit.* il D'Ascia, *Storia dell'isola d'Ischia*, Napoli, 1867; il De Siano, *Brevi e succinte notizie di storia naturale e civile dell'isola d'Ischia*, Napoli, 1861.

iore [1]) e nel periodo aragonese fu donata da Alfonso il Magnanimo alla sua favorita Lucrezia d'Alagno, la reggia posta nella fortificazione delle quattro torri, fu abbellita, fu scavata nella roccia la galleria di accesso, larga m. 10 lunga m. 457, alta m. 18, capace di dar passo ad uno stuolo di cavalieri; furono innalzati a protezione e difesa potenti baluardi, e la corte fastosa fu centro di vita; pullularono monaci e prelati, artigiani ed impîegati.

Nel Rinascimento infeudato alla Casa del Vasto, e dimora di Vittoria COLONNA, fu asilo di poeti e cavalieri; sostenne guerre, assedii, assalti pirateschi. La popolazione si accrebbe a segno, da non più essere contenuta, e mentre dapprima gli abitanti terrorizzati dal ricordo dell'eruzione e poi dalle narrazioni che le generazioni si tramandavano, si contentavano di esulare nelle ore del giorno per coltivare i campi e dedicarsi ai traffici, tornando la notte alla «città» nel secolo XVI divenute urgenti le necessità del lavoro, essi iniziarono l'esodo e, lentamente, uscirono dal castello a ripopolare i borghi e le ville seguendo il cammino inverso a quello fatto per fuggire il flagello.

Il primo a ripopolarsi fu il borgo Celso che fu il nucleo d'Ischia [2]).

L'insediamento, adunque, permane integro là dove il fenomeno naturale l'ha spinto; continua fino ai primi dell'800 [3]) e soltanto la guerra e l'opera distruttrice dell'artiglieria, diroccando gli edifici, ne affrettano la fine. La popolazione castrense, con alterne vicende, dimora sulla rocca per ben cinque secoli, accrescendo il suo numero e moltiplicando le sue attività: nel 1757 in un'area di 0.70 kmq. si contavano 1892 fuochi [4]).

---

[1]) Già Ischia era detta — Insula maior: «Aenaria... usitatiori vero nomine Insula maior, dice l'anonimo sorrentino nel IX secolo in Vita S. Antonini Abbatis: V. CORTESE Nino. *Il ducato di Sorrento e Stabia e il suo «territorium* in Arch. st. Prov. Nap., Nuova serie, anno VIII. Napoli, 1927, pag. 12 e v. anche SCHIPA, Op. cit., pag. 113. Ischia maggiore ed Ischia minore appaiono in un diploma di Federico II d'ARAGONA, intendendosi per Ischia maggiore l'isola, per Ischia minore, l'isolotto del castello. V. Vincenzo PASCALE. *Descrizione storico-topografico-fisica del Regno di Napoli*, 1796, pag. 51.

[2]) V. *Ragguaglio* cit. «Li primi che uscirono destinarono per diloro dimora quel luogo rimpetto al medesimo castello ed attaccato al di lui istmo, che si denominava Celso, a causa che in tale sito c'era stata una grande piantagione di alberi di gelsi. V. nello stesso Ragguaglio altrove ... «gli accennati abitanti pian piano formarono delle contrade, delli vichi, delli casali e delle terre»: e altrove ancora ... in essa (Ischia) vennero trasferiti tutti i privilegi, le prerogative, ed i governi dell'antichissima città».

[3]) ALGRANATI, *Ischia*. Il diroccamento avvenne durante le guerre napoleoniche.

[4]) D'ASCIA, *Op. cit.* pag. 353 e D'ALOISIO. *L'infermo istruito nel vero salutevole uso dei rimedi minerali dell'isola d'Ischia*, Napoli 1757.

Un documento iconografico del periodo del ripopolameuto intenso è il castello affrescato iu un soffitto della torre di Bovino, in cui la rocca appare fitta di edifici [1]); una delle tavole dell'opera di HAMILTON sui Campi flegrei mostra il eastello stesso con numerose abitazioni [2]).

È da notare come il popolamento della rocca vi abolì totalmente, a causa dei molti edifici, i terreni coltivabili; la *città* divenne adunque centro di assorbimento di prodotti agricoli; donde la necessità di coltivare i campi e di abbandonare durante le ore diurne la rocca; l'agricoltura e la pesca ed in minor misura la caccia, furono in seguito il seme del ripopolamento dell'isola. Dapprima tutti i casali dipendevano dalla *città*.

Il rifiorire dei centri isolani non depopolò la *città* e quando l'isola fu divisa in tre Università, essa sola ne rappresentò una, l'altra essendo costituita dalla *Terra* di Forio col casale di Panza e l'ultima dalla Università del Terzo, comprendente tutti gli altri borghi e casali: Casamicciola, Lacco, Barano, Moropane e Serrara Fontana [3]).

Alle precedenti osservazioni è da aggiungere che, fenomeno assai meno vasto, in conseguenza di questa eruzione (e non diversamente dovette essere per le altre) ma pure interessante, fu la trasformazione subìta dal suolo; la presenza di lave e di scorie riversate sopra superficie imponenti alterò sensibilmente i terreni agrari, sottraendo un vasto tratto alla coltivazione e destinando una parte al cespuglio e alla foresta di conifere.

In seguito poi, nell'alterna vicenda delle forze naturali ed umane, gli abitanti, passati alcuni secoli, tentarono di bonificare i campi di scorie [4]).

---

[1]) ALGRANATI, *Ischia*, pag. 80.

[2]) *Campi Phlegraei*. observations on the volcanes of the two Sicilies, as they have been communicated to the royal Society of London — by Sir William HAMILTON — Naples, 1776, tav. XXXI. Fra le belle incisioni in rame. dipinte a tempera, tre tavole — XXX, XXXI, XXXII -- sono consacrate ad Ischia.

[3]) Ferdinando IV a Ischia — 1783-84, del parroco Antonio MORALDI a cura del notaro G. D' AVETA — Napoli 1922, pag. 36. DE SIANO, *Brevi e succinte notizie di storia naturale e civile dell' isola d' Ischia*. (s. a. compilato prima del 1798) pag. 81. « Il governo civile dell' isola un tempo dipendeva dalla sola città ed allora tutte le terre che formano la popolazione medesima, erano suoi casali, ma poi essendo cresciuta la popolazione, come si è veduto sopra, si è diviso in tre terzi ...

[4]) « Molti che tengono territori contigui all' Arso avendosi guardate le parti attaccate e confinanti si sono in esse formati alberi e querci da lavoro di grossi bastimenti ed in quantità. Altri, da poco tempo in qua, in varie parti dell' arso si hanno fatto degli aumenti e de' coltivi e ci si sono prodotti vigne, alberi da fichi e di frutti e reso il terreno anco a dare degli ortaggi da mangiare, siccome porzione si è aumentata a bosco ». *Ragguaglio*.

Fenomeni secondari del vulcanismo e loro influenza sulla variazione e fluttuazione della popolazione.

Terremoti.

Se le eruzioni, colla gravità dei loro fenomeni, hanno creato movi-
enti di importanza eccezionale e spostamenti radicali, i terremoti hanno
ciso sulla variazione e distribuzione della popolazione, in modo meno
nsiderevole, ma pur sensibile. In Ischia i terremoti sono « per eccellenza
lcanici » [1]) e molti di essi, che non meritano registrazione speciale, ac-
mpagnano le eruzioni. Altri sono esocentrici [2]) e in genere non producono
ttime e lesioni negli edifici; altri infine sono endocentrici e, salvo rare
cezioni, hanno il loro centro nel comune di Casamicciola [3]).

Dei terremoti endocentrici, alcuni di lieve entità producono scarsis-
mi danni; così sappiamo unicamente che il terremoto del 1557 fece crol-
re la chiesa del villaggio di Campagnano [4]); altra chiesa cadde nel 1762
Casamicciola [5]), altra ancora presso il Rotaro nel 1757 [6]).

Fecero vittime umane e produssero lesioni più o meno gravi alle
bitazioni, i terremoti del 1228, del 1796, del 1881 e il gravissimo scuoti-
ento del 1883. Quelli che seguirono e per la scarsa entità loro e per le
ovvidenze edilizie, che vollero, dopo il 1883, costruzioni antisismiche,
n produssero conseguenze di rilievo.

All'esame particolare dei più importanti terremoti premettiamo alcune
sservazioni.

Poichè il numero delle vittime, pure essendo in dipendenza del crollo
egli abitati, è determinato anche da ragioni accidentali, quali l'ora della
ossa, il caso, il panico ecc., più preciso indice di interesse antropogeo-
rafico, è dato dai danni prodotti alle abitazioni. Poichè il terremoto non
epopola i centri, altro che transitoriamente, deprimendo il numero, la
ariazione non ha importanza fondamentale; mentre il crollo degli abi-
ati sposta i rioni, cambia l'aspetto dei centri nel senso topografico e il
utamento dei tipi di abitazione muta anche l'aspetto del paesaggio.
crolli, le distruzioni, col deposito di macerie, mutano o cancellano le
e di comunicazione, inceppando i transiti, spostando le correnti com-
erciali.

---

[1]) Baratta, *I terremoti d' Italia*, Torino, Bocca, 1901. pag. 789.

[2]) Baratta, *Op. cit.*, pag. 790.

[3]) Baratta, *Op. cit.*, pag. 789.

[4]) D' Ascia, *Storia dell' isola d' Ischia*, Napoli, 1868, pag. 451-452.

[5]) Baratta, *Op. cit.*, pag. 247.

[6]) Rittmann, *Op. cit.* Il Rittmann dà un completo elenco dei terremoti isolani,
enza però distinguere le specie.

Il primo terremoto registrato dalla storia è quello del 1228 [1]) e meglio viene descritto il fenomeno come la ruina di una parte dell'Epomeo (MonsIsclae) onde furono nei casali sotto le frane sepolti circa settecento uomini; il MERCALLI opina che di ciò sia stato causa un violento terremoto [2]). Nel 1796 vi furono sette vittime a Casamicciola [3]) e nel 1828 28 morti e 51 feriti [4]) e crolli di molte case.

Il 4 marzo 1881, nella violenta scossa che da Casamicciola si propagò a tutta l'isola, i morti salirono a 121 e i feriti a 140 e le case che rovinarono più o meno completamente furono 249 [5]).

Ma il disastro gravissimo che gittò l'isola nella desolazione fu provocato dalla violenta scossa del 20 luglio 1883, durata 15 secondi circa [6]).

L'entità del disastro è presentata nel seguente specchietto che il BARATTA produce, traendolo da documenti ufficiali [7]).

Località	abitanti	vittime		numero delle abitazioni			
	prima d. sc.	morti	feriti	prima d. sc.	croll.	danneg.	illesi
Casamicciola	4300	1734	448	672	537	134	1
Lacco Ameno	1800	146	93	389	269	102	18
Forio con Panza	6800	345	190	2713	1344	977	392
Serrara con Fontana e Giglio	2000	28	21	1159	65	973	121
Barano con Moropane e Fiaiano	4600	10	10	2693	63	1430	200
Ischia	6600	—	—	—	—	—	—

Le abitazioni illese sarebbero dunque, per Ischia il 100 % per Forio il 14 %, per Ferrara il 10 %, per Barano il 7 %, per Lacco il 5 %, per Casamicciola il 0,05 %.

I comuni danneggiati si seguono nel senso inverso, Casamicciola, Lacco,

---

[1]) « Eoden mense Julii mons Iscle subversus est, et operuit in casalibus sub eo degentes fere septigentos homini inter viros et mulieres » Riccardo DE SANCTO GERMANO Notarii Chronica. In « *Ignoti monachi Cisterciensis S. Mariae de Ferraria Chronica* ecc. edita dal GAUDENZI. Napoli, 1888 p. 128. In BARATTA, *Op. cit.*, p. 32.

[2]) *Op. cit.*

[3]) BARATTA, Op. cit., secondo MERCALLI, *L'isola d'Ischia ed il terremoto del 1883.* Memorie R. Ist. Lomb. di Sc. e Let., vol. XV, fasc. 2.°, pag. 99-154. Milano, 1884.

[4]) BARATTA, *Op. cit.*, pag. 356.

[5]) BARATTA, *Op. cit.*, pag. 485.

[6]) Su questo movimento sismico v'è una numerosa serie di scritti scientifici. V. in BARATTA, *Op. cit.*, pag. 495, oltre ad opuscoli di occasione, cronache, descrizioni, relazioni ufficiali, numeri unici, provvedimenti edilizi ecc.

[7]) BARATTA, *Op. cit.*, pag. 497.

arano; hanno subìto i massimi danni. Le vittime rappresentano invece er Forio il 5,7 %$_0$ per Serrara l'1,4 %$_0$, per Barano il 6,22 %$_0$, per Lacco 8,1 %$_0$, per Casamicciola il 41,5 %$_0$.

Non c'è tale rapporto fra vittime e danni che consenta di stabilire ome le une dipendano esattamente dagli altri, e sebbene press'a poco, i omuni coi massimi danni abbiano anche il massimo numero di vittime, spostamento fra Forio e Serrara è notevole.

Le cifre della tabella vanno considerate come approssimative, sebbene 'atte da documenti ufficiali. La non assoluta esattezza è accusata dal nuiero degli abitanti dei vari comuni noverati precedentemente alla scossa; no tutte cifre tonde, il che è inverosimile. Infatti il dott. GIUOCHI, testione oculare e attore di primo piano nelle opere di salvataggio, conoscire dell'isola in cui dimorava dal 1866, esaminò con occhio esperto i danni potè raccogliere sul luogo precise informazioni che ci tramanda nel suo olumetto documentario [1]).

Le cifre della popolazione, pur non discostandosi da quelle che ci dà BARATTA, accusano appunto un voluto arrotondamento nelle cifre ufficiali.

Abbiamo nel GIUOCHI,

per	Casamicciola	4235
»	Lacco Ameno	1537
»	Forio con Panza	6758
»	Serrara Fontana	1778
»	Testaccio	1395
»	Barano, Moropane e S. Angelo	3385 [2]).

Ischia ad esempio appare immune affatto, eppure essa accusò L. 5355 i danni agli immobili, accertati poi in L. 1121: l'assoluta incolomità non ovette dunque esistere, [3]). Tale forse apparve nei confronti dei comuni diıstrati; interi rioni furono distrutti, tanto a Lacco che a Casamicciola e edificati in diverso luogo e con diverse norme; alle palazzine furono soituite baracche col solo pianoterra, la copertura per lo più a terrazza di lamiera ondulata; fu eliminata anche in gran parte l'architettura ruica locale, che si ricollega al tipo detto caprese.

Un vero capovolgimento avvenne per quanto riguarda le condizioni conomiche nei vari strati sociali. Moltissimi dei non abbienti e anche dei iiseri, ebbero il dono di un'abitazione, mentre i ricchi, privati dei loro eni immobiliari, ottennero quello stesso, che aveva ottenuto il popolo.

---

[1]) GIUOCHI Andrea, *Ischia dalla sua origine fino ai nostri giorni*. Roma, 1884

[2]) GIUOCHI, *Op. cit.*

[3]) GIUOCHI, *Op. cit.*

Una specie di livellazione sociale ed economica di cui a torto può venir data colpa a chi distribuì soccorsi, ma che fu un prodotto diretto e quasi naturale del fenomeno sismico, pose sullo stesso piano gente di origine e grado diversi.

Altro fatto importante per l'economia dell'isola fu, in quella occasione, la organizzazione di una industria domestica, la quale per non breve periodo di tempo, rappresentò una importante risorsa locale; voglio alludere ai tipici lavori di paglia di grano, manufatti dalle donne e recati dai venditori ambulanti in Inghilterra e nelle Americhe.

In totale, la topografia e l'economia dell'isola vennero sensibilmente modificate. In quanto all'entità dei danni, essi furono massimi per le case poste in terreni costituiti da marne o tufi poco omogenei e consistenti, minori per quelle poste in piano nelle sabbie poco coerenti delle spiagge, e specialmente dove il sottosuolo è di roccia compatta, minime per quelle costruite sulle rocce trachitiche [1]). Le volte a botte, i muri a secco, frequenti nelle vigne e sui costoni dei colli rimasero salvi [2]).

Bradisismi.

Non facilmente determinabili sono, in genere, i rapporti fra il variare della popolazione e i bradisismi; premetteremo anzi che in Ischia lo studio del fenomeno è ancora assai limitato. Le osservazioni, le deduzioni e le ipotesi, per un ventennio, sono dovute al Glabrowitz, il quale è riuscito a stabilire fra il 1890 e il 1912, un abbassamento dell'isola di mm. 4,6 in media all'anno [3]); questa media, ci dice anche il Platania [4]) sarebbe da risultati inediti, ancora cresciuta negli ultimi anni. Nessuna constatazione di sollevamenti e però le osservazioni mareografiche e i relativi dati non sono sufficienti.

Dippiù, per i tempi precedenti a questo periodo, dobbiamo rinunziare a risultati di carattere scientifico. Cosicchè occorre affidarsi:

1.° alla diretta osservazione dei terreni sommersi;

2.° a quanto la storia ci documenta e la tradizione si tramanda.

Per quanto si riferisce alla diretta osservazione dei terreni sommersi, dobbiamo riferirci ai resti di edifici visibili al largo presso l'approdo di Casamicciola e alle Camerate, scoglio presso Forio, che deve il suo nome al fatto, che sotto il livello marino, sono in esso scavati vani, probabili resti di abitazioni [5]).

---

[1]) Baratta, *Op. cit.*, pag. 789-90.

[2]) Giuochi, *Op. cit.*

[3]) *Sul sospettato bradisisma appenninico 1900-08.* Boll. Soc. sismologica italiana, 1920-21 Modena, 1922.

[4]) Atti XI Congresso geog. it., vol. II pag. 341.

[5]) Non è stato ancor fatto alcun serio sopraluogo.

La storia ci documenta poi in vario e sicuro modo la scomparsa di
atti costieri già esistenti.

Essi erano:

1.° Una costruzione ritrovata mentre si scavava nel litorale a piè del
. Campagnano e in cui le porte dei magazzini erano giunte ad esser quasi
praffatte dal mare. In seguito la costruzione discese ancora di livello
sin' al Lastraco » (astrico-copertura) [1].

2.° Numerose fonti, tutte oggi occupate dal mare, esistenti un tempo
a il litorale a piè del monte di Campagnano, lungo tutta la costiera fino
porto d'Ischia [2].

3.° Il Bagno de' Sassi « sistenti nel lido della città » e occupato dal
are: « su di loro il mare si è molto inalzato » [3].

4.° Resti di edifici sul fondo marino, al largo di Casamicciola (se ne
ggono a riscontro, anche nell'istmo subacqueo che unisce Cosamicciola
Vivaro).

5.° Il Ninfario, mirabile giardino, con vasto frutteto, congiunto con un
olo ai luoghi per la caccia del coniglio, provvisto di una vasca scavata
r la raccolta delle acque minerali. Esso era presso la torre di Bovino o
Guevara [4]) detta anche di Sorronzano, perchè sorge a pie di quella col-
a; il Ninfario, la cui superficie andò riducendosi e che oggi è quasi to-
lmente scomparso, conteneva, verso il mare, una fresca sorgente di acqua

---

[1]) V. ALGRANATI, *Variazioni* ecc.

... « essendosi fatto uno scavamento... si è trovata una fabbrica con ma-
zzini ne' quali ancora esistevano le porte con catenacci, che dimostravano di
cirsi al livello del lido e del mare. Dappoi tale fabbrica fu seppellita dalla sabbia
dalle pietre sin' al Lastraco, onde si conosce nel Littorale d' Ischia il mare di
anto si è elevato e di quanto è entrato. *(Ragguaglio)*

[2]) « Dal littorale dal monte di Campagnano tirandosi per spiaggia romana, per
ninfario, per la costa fino al castello, dal castello per il lido della città ... per
littorale delle Cremate, della spiaggia della villa de' bagni, del colle di S. Pietro
dell' altro colle rimpetto ove sta sito il Real Casino del litorale S. Alessandro ...
erano tante acque minerali e sorgive, le quali si sono tutte perdute, attesochè
mare essendo entrato di molto in dentro, l' have tutte occupate ed assorbite.
agguaglio).

[3]) Così il nostro *Ragguaglio*. E Giovanni VILLANO nelle *Cronache della Inclita
à de Napole emendatissime con li Bagni de Pozzolo et Ischia novamente ristampate*,
ite in « Raccolta di varii libri ovvero opuscoli d' historie del Regno di Napoli
varii ed approbati autori che con difficoltà si trovano di nuovo, fedelmente Ri-
ampati e corretti. Napoli, 1660, dice (fol. 120): Li Bagni de li Saxi dui sonno, de
quali l' uno è dentro li Saxi vale ad ognie gotta frigida, et l'altro vicino al litto
l mare, vale ad ogni gotta calida ».

[4]) ALGRANATI, *Ischia* pag. 98 e *Variazioni della costa, ecc.*

potabile, che alimentava tutto il borgo Celso, e la cui scomparsa determinò una condottura di acqua dal Buceto, fatta sotto il vicerè cardinale di Granvela e sgorgante in una fontana nella piazza del borgo. Ci consacra il nostro *Ragguaglio* che in quella occasione, sulla fontana fu apposta una lapide, dettata da mons. Guglielmo Rocca, vescovo, col distico:

Eas sudavit acquae cereris patientia curtae
Edocuitque fames ferre magistra sitis.

Ma sotto i Borboni fu necessario rifare la condottura ed al distico fu sostituita una lapide, apposta sur un edificio, la quale porta la data del 1728.

6.° Gli scogli che, verso la punta della Scrofa, circondavano l'isolotto dello stesso nome; la superficie dell'isolotto stesso è sensibilmente diminuita [1]).

7.° Sorgenti nella spiaggia dei Maronti, un tempo emerse, ora coperte dal mare, dove si vedono ripullulare. Tutti questi e i precedenti dati, consacrano una diminuzione di superficie ed un abbassamento dell'isola. Si potrebbe obbiettare che non soltanto ai bradisismi può attribuirsene la causa, che parte può anche aver avuta l'erosione, onde non è possibile stabilire con precisione a quali delle forze naturali e in che misura a ciascuna spetti l'opera demolitrice.

Riferendoci ad ogni modo a quanto conferma l'autore del *Ragguaglio* « il mare in tutto l'accennato circuito e territorio, non solo è entrato notabilmente in dentro, ma benanco dal proprio livello sin a qualche passo si è inalzato ed elevato e non ci è dubio » concluderemo che i tratti scomparsi per sommersione, e cioè:

1.° le Camerate (sulle quali permane il dubbio);

2.° gli edifici presso il litorale di Casamicciola;

3.° la costruzione del borgo d'Ischia;

4.° gli isolotti intorno alla Scrofa, stanno ad attestare un importante bradisismo, mentre il Ninfario, le fonti dei Maronti, lasciano il dubbio che possa la erosione associarsi al bradisismo.

D'aumento non si ha altra notizia, che quella dataci dal Marinelli, il quale sulla base delle misurazioni eseguite, lo calcolava tra il 1872 e il 1896 a kmq. 0,510 e lo attribuiva almeno in parte all'avanzamento la costa meridionale, dove si scaricano i torbidi rii di Serrara e Fontana [2]).

---

[1]) Vedi ancora Algranati, *Variozioni* ecc. In questo caso la documentazione è tratta dalla cartografia del tempo.

[2]) Marinelli G., *Variazioni nella valutazione della superficie del Regno d'Italia*, Venezia, 1897. V. Mori A., *L'area delle minori isole italiane.* De Magistris L., *Il principio della proporzionalità nelle misure areometriche a proposito dell'isola d'Ischia.* Roma Soc. Geog. it., 1903.

questa supposizione si possono opporre dati di fatto; l'avanzamento della ta meridionale è inesistente, anzi il mare ha sommerso fonti che una ta emergevano. È probabile che il fenomeno, assolutamente transitorio, da attribuirsi alle conseguenze dei terremoti del 1881 e del 1883, come ebbi ad osservare [1].

In che modo ed in che misura, l' abbassamento e la diminuzione di erficie – chè in totale, la superficie dell' isola ha subito dall'antichità oggi una notevole diminuzione — hanno inciso sul numero e la distri-zione degli abitanti?

È ovvio che una contrazione della superficie dovrebbe produrre un ac-escimento, sia pur lievissimo, nell'indice della densità; ma alla determi-zione del rapporto, che potrebbe esser calcolato per tempi lunghissimi cifre minime, si oppongono altre molteplici cause, concorrenti a creare variazioni demografiche.

Sono però da considerarsi aspetti speciali, creati dalla importanza della alità scomparsa.

Particolarmente notevole è la sommersione di sorgive, come nel caso quella potabile del Ninfario.

Il bradisismo è, però, fra tutti i fenomeni del vulcanismo, quello che no profondamente e più lentamente influisce sull'antropogeografia isolana.

Le acque minerali.

Il più costante e determinabile dei fenomeni secondari del vulcanismo, l quale ci resta ad occuparci, è, senza fallo, quello delle sorgenti minerali

Le sorgive vere e proprie vanno distinte dalle fumarole; le une e le tre sono mutate nel numero attraverso i secoli [2]) alcune sono scomparse nza una causa determinabile, altre sono state coperte dal mare.

La fama e l' efficacia di questi naturali mezzi di cura hanno dettato STRABONE ai tempi nostri, passi, capitoli, volumi interi, a medici, scien-ati, poeti [3]) e giramondo. È dunque possibile seguire, attraverso tanta let-

---

[1]) Gina ALGRANATI, *Variazioni* ecc.

[2]) Il CAPACCIO (*La vera antichità* ecc.) novera undici sorgive di acqua fredda a non vi sono che il Buceto e il Pisciarello) e trenta di acqua calda e medicale, dici ne tramanda il VILLANI (1471), un elenco quasi simile ne dà l' ELISIO; SOLINO ne conta 37 di acqua calda e 11 di acqua fresca...

Disparità dipendente dalle varie fonti cui sono state attinte le notizie, oltre e dai tempi diversi.

[3]) La letteratura poetica dell' isola è accennata in ALGRANATI, *Ischia*. Arti afiche, Bergamo 1930. Un intero poema ha scritto C. E. DE QUINTIS, *Inarime u de balneis Pythaecusarum*; libri VI. Napoli, 1726.

E un Camillo PORZIO, che il MARTORANA nega e il PADIGLIONE sostiene, esser

teratura il variar del numero; ma proporsi un tal viaggio letterario significherebbe esulare dal tema, che vuol contemplare unicamente i rapporti del fenomeno con gli insediamenti umani e le loro variazioni.

Il RITTMANN in scientifico pellegrinaggio, ha rintracciato le fumarol oggi esistenti, noverandone 50 gruppi da ascriversi secondo la classificazione di SAINTE CLAIRE DEVILLE e FOUQUET al 3.° e 4.° ordine [1]) ed ha considerate le principali fonti.

Medici quali Andrea BACCIO [2], il napoletano ELISIO [3]), il calabrese IASOLINO [4]) del cinquecento, più tardi il D'ALOISIO [5]), il DEL GIUDICE [6]), il MORGERA [7], il VERDE [8]), il MARONE [9]) ecc. offrono a chi voglia interessarsene descrizione accurata dei bacini, analisi e indicazioni dell'uso a seconda dei mali e dell'efficacia di ciascuna acqua, notizia delle guarigioni miracolose mentre scienziati come l'ANDRIA [10]), il DE RIVAZ [11]), il COVELLI [12]) lo SCAC-

---

lo storico autore della « *Congiura dei baroni* » ha lasciato manoscritta una epistola in versi napoletani intitolata *Li vagne d' Isca*, tutt' altro che castigata, ma da cui si deduce la gran fama delle acque e l' enorme concorso di bagnanti :

« Ca scenue na catervia
De mascole, de femmene
Co 'nfermetate varie
Che ne Galeno e Ppocrate
Nne saparrie lo numero ».

In *Raccolta di opere inedite in dialetto napoletano* fatta per cura di Pietro MARTORANA, Napoli, 1867, fol. II — 23 Manoscritto fondo S. Martino, n. 707.

[1]) RITTMAN, *Op. cit.*, pag. 83.

[2]) BACCIO, *De thermis*, op. cit.

[3]) ELISIO, *Op. cit.*

[4]) JASOLINO, *Op. cit.*

[5]) D' ALOISIO, *Op. cit.*

[6]) DEL GIUDICE, *Viaggio medico*, Napoli, 1821.

[7]) MORGERA, *Le terme dell' isola d' Ischia, prima e dopo gli ultimi terremoti distruttivi*, Napoli, 1890.

[8]) VERDE M. e REALE N., *Dell' analisi chimica di una nuova acqua termo minerale nel comune di Forio d' Ischia*, preceduta da una descrizione naturale dell' isola, Napoli, 1866.

[9]) Marone VENANZIO, *Memoria contenente un breve ragguaglio dell' isola d' Ischia e delle acque minerali, arene termali* ecc. Napoli, 1847,

[10]) ANDRIA, *Trattato delle acque minerali di Napoli.* Napoli, 1775.

[11]) DE RIVAZ CHEVALLEY, *Description des eaux minero-thermales et des étuves de l' ile d' Ischia.* Napoli, 1859.

[12]) COVELLI, *Cenno sul tremoto d' Ischia.*

i [1]), Mercalli [2]), Palmieri [3]), Oglialoro [4]), Grablowitz [5]), per non ci-
re che i principali e soltanto gli italiani.

È la presenza delle sorgive e delle fumarole ragione sufficiente a creare centro di popolamento? in linea generale si può rispondere negativamente. necessario che alla presenza delle acque minerali e termo-minerali siano sociate altre condizioni, primissima quella delle facili comunicazioni.

Se le sorgive sono agevolmente accessibili e sfruttabili, esse rappre-ntano, non già una ragione per la creazione di un centro, ma per il ripo-lamento di una zona precedentemente abbandonata, a causa di improvvisi paurosi fenomeni. Ciò avvenne, ad esempio, per le sorgenti di M. Vico, lla contrada ove oggi sorge il comune di Lacco Ameno.

Se esse presentano difficoltà di accesso e di sfruttamento, quale che sia loro efficacia, restano abbandonate, o almeno sfruttate saltuariamente; sì accade per le acque del bacino dei Maronti che occupano gran parte l versante meridionale.

Ivi le sorgenti dei Nitrioli, che sanano ulceri di ogni specie, quelle ll'Olmitello le molte fumarole, le arene mineralizzate dei Maronti, do-ebbero richiamare una densa popolazione estiva e creare un' industria l forestiero. Ma ciò non accade, poichè nessuna strada carreggiabile con-unge le alture del Testaccio e di Serrara con le spiagge, e le acque medi-mentose corrono nelle vallette incise, dette « cave » (affatto intransitabili) sono sfruttate solo dagli isolani, in cellette scavate nella roccia.

Delle fumarole, tutte a considerevole temperatura, molte si aggirano torno ai 100°; quelle del M. Cito ripetutamente esaminate da vari autori, l Mercalli, e dall' Oglialoro nel 1883, diedero al Salvatore 101°, le fu-arole di Cava Bellomo (Oglialoro, 1883), di Cava Petrella (Mercalli, 1883), ggiungono i 100°; quella della spiaggia dei Maronti diede alle osserva-oni dell'Oglialoro (1883) 100° e a quelle del Mercalli (stesso anno) 101 1/2°.

Le meno calde si aggirano intorno ai 35-40°, quella di S. Geronimo del-Arso misura 35° di temperatura.

---

[1]) Scacchi, *Campi e isole flegree*, Napoli, 1845.

[2]) Mercalli, *I terremoti* ecc. già cit.

[3]) Palmieri, *Acque minerali del Pio Monte della Misericordia in Casamicciola schia)*. Napoli, 1879; ed altri lavori sullo stesso argomento.

[4]) Oglialoro, *Acque del Gurgitello delle terme Belliazzi nell'isola d'Ischia*. Rend. cc. Sc. ser. III, Napoli, 1898.

[5]) Grablowitz, *Sulle sorgenti termali di Casamicciola*. Annali Uff. Centr. Meter. 889, Roma 1823.

Grablowitz. *Sulle sorgive termali del Porto d' Ischia*. Rend. R. Accad. Linc. *Le cque speciali termali dell' isola d' Ischia con riguardo speciale a quelle del bacino del urgitello in Casamicciola*. Ann. Uff. centr. Meter. 1890. Roma 1893.

Le sorgive di natura, temperatura e composizione varia [1]), indicate per molteplici mali, numerose un po' ovunque come le fumarole, possono essere classificate per quello che riguarda la nostra ricerca, in facilmente accessibili e difficilmente accessibili. Appartengono al primo gruppo quelle del versante nord-orientale, localizzate nei comuni di Ischia, Casamicciola e Lacco Ameno, e sono quelle di Fontana-Formello in Ischia; Gurgitello, Cotto e Sinigaglia e il gruppo della Rita in Casamicciola; Regina Isabella, fonte greca, fonte romana, e S. Restituta a Lacco Ameno.

---

[1]) La fama delle acque di Fontana e di Formello era nota a Strabone, la virtù a ciascuna particolare proclamata e decantata. Per ciascuna il LOMBARDI ha pochi versi latini che ne stabiliscono l' efficacia;

L' acqua di Formello:

Quartanae confert, spleni, capitisque dolori
Subveni, hydropi, phlegmaticaque febri
Vesicam reserat. lapides perfrangit harenos educit.

L' acqua di Fontana, fra le altre virtù,

Sanat plagas, ferrum extrahit... capillos
pulchros prolixosque reddit.

Il Gurgitello:

Aepaticis prodest, ferrum mirificas trahit

In quanto a Citara:

. . . . . . sterilem curat
spasmo succurrit

Le fonti d' Olmitello:

Arthritim pellet, lepram delatat
guttur diminuit, lapidem e corpore phlegma fugat.

Il Succellaro:

Vescicae prodest, phlegmaticaque febri,
Prolongat crines,
Deterget vultum et liberat scabie...

Il bagno di Piaggia romana:

Lacrymulus cohibet teneros confortat ocellos.

E Nitroli:

Ventriculum solvit, consumptus recreat
artus, subvenit hystericis reumaticisque malis.

Se si aggiungono le virtù delle varie altre sorgive e delle molte fumarole, è evidente che in Ischia esiste un rimedio per tutti i mali della umanità.

Le sorgenti di Forio, Cotugno, Castaldi e Citara, pur non essendo di ifficile accesso, sono scarsamente sfruttate in parte per la poca diligenza massimamente perchè il comune di Forio è il più lontano dalla costa ampana, il meno facilmente accessibile perciò dal continente, posto al linite estremo di una costa ricca di sorgenti notissime, utilizzate in terme ssai frequentate.

Inaccessibili consideriamo le fonti del bacino dei Maronti e la fonte el Castiglione che si riversa nel mare elevandone sensibilmente la temeratura e sgorga ai piedi dello scosceso colle di Castiglione, a pochi metri dal livello marino.

Non sempre la fortuna delle fonti fu quale oggi si presenta: i Romani redilessero Citara — che si vuole derivi il suo nome da Venere Citerea — i Nitroli. Presso queste ultime sorgive furono trovati marmi votivi, che ono oggi nel Museo Nazionale di Napoli [1]).

Così anche le acque del M. Vico (Lacco Ameno), frequentate dai Greci, urono utilizzate anche dai Romani.

Una terme greca ed una romana, vi furono infatti costruite e un ran numero di ritrovamenti fu fatto nella piana prossima alle fonti; onde ennero alla luce fittili e monete e utensili vari di tempi diversi della omanità.

La ragione per cui queste fonti oggi abbandonate furono utilizzate, va icercata nella esistenza di vie di comunicazione oggi cancellate, forse da ommozioni telluriche. Chè, ove fu difetto di strade le fonti furono deserte. l più delle volte il già citato *Ragguaglio* osserva (siamo ai primi dell'Otocento): « nell' Arso vi sono molte fumarole molto atte per sudatorj e erchè sono site in luoghi sinistri e disagiati, e senza via, non si è divenuto farne uso; e maggiormente che ci sono li sudatorji di Casamicciola e Testaccio esperimentati ed assicurati ».

Facciamo nostra questa osservazione e la estendiamo a tutte le sorgive abbandonate, determinando che sono causa dell'abbandono; 1.º la scarsezza difficoltà delle comunicazioni, 2.º la fama di altre simili sorgenti in luoghi accessibili.

In qual modo e in qual misura le sorgenti accessibili e sfruttabili nfluenzano la variazione demografica? Anche qui l'utilizzazione è da guardarsi assai più in rapporto ai facili mezzi di comunicazione e allo sviluppo dell'industria alberghiera, che non al valore delle fonti. Che se 'importanza medicamentosa delle sorgenti fosse ragione prevalente di richiamo, affollatissime di malati dovrebbero essere quelle di Lacco che hanno alto grado di radioattività — delle quali anzi, la greca è la più radioattiva del mondo.

---

[1]) Algranati, *Op. cit.*

Non è possibile là dove entra in giuoco l'opera umana astrarre dal temperamento e dalle attività degli abitanti. La migliore organizzazione contribuisce molto allo sviluppo e ai redditi dell'industria: dei tre comuni. Casamicciola in questo prevale e richiama i malati da ogni parte del mondo; una folla varia ed internazionale popola i suoi alberghi e le sue case private, nella stagione estiva. Eppure Casamicciola è tra i comuni dell'isola quella che segna *un minor incremento demografico.* Infatti tra il 1861 e il 1931 ha segnato un aumento di popolazione del 7 %; nè ciò è da attribuirsi alle conseguenze dei terremoti.

Del resto basta esaminare il seguente specchietto in cui appaiono le percentuali nell'aumento della popolazione e le occupazioni prevalenti in ciascun comune.

Comuni	1861-1931 aumento del	occupazioni
Barano	210 %	comune agricolo
Ischia	35 »	» dedito all'industria termale e all'agricoltura
Serrara	27 »	comune agricolo
Lacco	24 »	» » ed in parte dedito all'industria termo-minerale
Forio	24 »	comune agricolo
Casamicciola	7 »	» consacrato all'industria termo-minerale.

I tre comuni prettamente agricoli hanno un sensibile aumento, fortissimo quello di Barano; e se per Forio non si tenga conto del periodo eccezionale, 1921-31, che segna una diminuzione del 12 % nel numero degli abitanti e si guardi il sessantennio 1861-1921, si avrà un aumento del 40 %.

Se poi si prendono in esame i tre comuni costieri di nord est, si nota che il più forte aumento appartiene ad Ischia, aumento costante nell'ultimo trentennio,

Anno 1901	abitanti	7012
» 1911	»	9197
» 1921	»	8192
» 1931	»	8842

Una esposizione completa delle privilegiate condizioni di questo comune chiarisce le ragioni dell'aumento, che non sono da attribuirsi all'industria termo-balneare. In quanto a Lacco Ameno ha minime variazioni nell'ultimo trentennio.

Anno	1901	abitanti	1955
»	1911	»	1896
»	1921	»	1981
»	1931	»	1879

scilla dunque tra succedersi di aumento e diminuzione.

Più costante appare Casamicciola, che mostra un magro aumento. 'esame del complesso delle condizioni economiche di ciascun comune po-'à meglio illuminarci sulle cause delle variazioni nell'ultimo trentennio; ı ogni modo risulta evidente che la presenza delle acque termali acces-bili, e perciò a bassa quota, non incide sull'aumento di popolazione del ıogo, mentre crea una periodica fluttuazione nella stagione balneare.

Su alcune formule dell' Algebra delle successioni e sullo sviluppo di alcuni determinanti.

Nota di **G. Palamà**, *presentata dal socio corrisp.* **M. Pascal**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Valendosi di alcuni risultati ottenuti dal Mambriani, si danno gli sviluppi delle potenze isoberiche e binomiali e se ne fanno alcune applicazioni al calcolo di alcuni determinanti.

L' algebra delle successioni a mezzo del suo autore, A. Mambriani, è riuscita quasi ad affermarsi, perchè questi a mezzo di essa, in varie memorie [1]), ha ottenuto sia delle nuove formule, alcune delle quali veramente importanti nell' Analisi, sia, con grande rapidità, altre già note e perchè infine, con quell' algebra, molte formule acquistano notevole concisione nella loro scrittura.

---

[1]) L' autore ha presentato i suoi studi con due 1e memorie pubblicate negli Annali di Mat., risdettivamente nel Tomo VIII, serie IV, 1930 e Tomo IX, serie IV, 1931 e in varie memorie successive. (In seguito le due dette 1e memorie le richiameremo semplicemente così: A. M. Mem. I, e A. M. Mem. II.).

Cfr. A. Mambriani, *Sulla risoluz. delle equaz. differenziali lineari a coefficienti costanti.* Boll. Un. Mat. It., Anno IX, N. 5, dic. 1930.

Idem, *Sugli sviluppi, dati dallo Schwatt di* $\sec^p x$, *e* $tg^p x$, Boll. Un. Mat. It., Anno X N. 1, febbr. 1931.

Idem, *Sulle espressioni della forma* $\sum_{r=0}^{m} K_{m,r}\, a_{m-r}\, b_r$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$. Rend. R. Ist. Lomb. di sc. e let. vol. LXV, fasc. VI-X, 1932.

Idem, *Sulla somma di certe serie di potenze e su una trasformazione di Pincherle.* Boll. Un. Mat. It., Anno XII N. 5, 1933.

Idem, *Sulla derivazione di ordine superiore delle funzioni composte*:

Nota 1.a Boll. Un. Mat. It., Anno XIII, N. 4 ott. 1934,
» 2.a » » » » 5 dic. »
» 3.a » » XIV » 1 febb. 1935.

Alquanto dopo la pubblicazione delle due 1e memorie di A. Mambriani, René Lagrange introduceva lo studio di algoritmi analoghi e le Note di questo autore sono riferite da A. M. Mem. I, pag. 104.

Cfr. inoltre A. Mambriani, *Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi di* Bernoulli *e di* Euler. Memorie della Reale Accademia d' It. Vol. III, Matematica: N. 4, 1932.

Pertanto stimo interessante portare un piccolo contributo allo sviluppo
quest' algebra.

Darò in questa Nota gli sviluppi delle potenze isobariche $a_n^{-v)n}$, $a_n^{m)n}$ e
ello delle binomiali $a_n^{-v)^n}$, $a_n^{m)^n}$ in funzione di a_n e dal confronto di questi
ultati con altri ottenibili per altra via, lo sviluppo di alcuni importanti
terminanti.

1. Quegli sviluppi sono

$$)_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}\, a_0^{-(r+1)} \, ,$$

$$)^n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{r-1}}{i_r} a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}\, a_0^{-(r+1)} \, ,$$

$$)_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{m-r} \sum a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}$$

$$)^n = \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{m-r} \sum \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{r-1}}{i_r} a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}$$

$$)_n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \cdot \binom{n+v}{m+v} \cdot \binom{m+v-1}{v-1} \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{-(v+r)} \cdot \sum a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}$$

$$v)^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \cdot \binom{n+v}{m+v} \binom{m+v-1}{v-1} \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{(v+r)}$$

$$\sum \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{r-1}}{i_r} \cdot a_{i_1} \cdot a_{i_2} \dots a_{i_r}$$

elle precedenti la Σ delle espressioni: $\Sigma a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}\, a_0^{-(r+1)}$, $\Sigma a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}$,
$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i-\dots-i_{r-1}}{i_r} a_{i_1}\, a_{i_2} \dots a_{i_r}$. è estesa a tutte le
luzioni positive non nulle della

$$) \qquad i_1 + i_2 + \dots + i_r = n .$$

Si osservi che se $i_1 = \alpha_1, i_2 = \alpha_2, \dots, i_r = \alpha_r$ è una qualunque delle so-
zioni di (7), permutando in tutti i modi possibili $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ si ottengono
trettante soluzioni. Precisamente se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ sono in ordine non de-
escente e se le prime s_1 sono fra loro uguali e poi sono uguali le succes-
ve s_2 e così di seguito, se i gruppi che così si formano sono p, con

$$s_1 + s_2 + \dots + s_p = r \, ,$$

è

$$\frac{r!}{s_1!\, s_2! \ldots s_p!}$$

il numero delle soluzioni distinte che dalla $i_1 = \alpha_1, i_2 = \alpha_2, \ldots, i_r = \alpha_r$, si ottengono con le indicate permutazioni.

Le formule (1), (2), (3), (4) si possono dimostrare con il metodo d'induzione completa; la (5) e la (6) si sono ottenute servendosi di formule trovate da A. MAMBRIANI [1]) quando in esse al posto di $a_n{}^r)_n$, $a_n{}')^n$ si sostituiscono i valori che si ottengono, rispettivamente, a mezzo di (3) e (4).

2. Le formule (2), (4), (6) possono anche scriversi in maniera diversa quando si tenga conto della identità

$$\binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-i_2-\ldots-i_{p-1}}{i_p} =$$
$$= \frac{n!}{i_1!\, i_2! \ldots i_p!\, (n-i_1-i_2-\ldots-i_p)!}$$

3. Poichè A. MAMBRIANI [2]) dà per $a_n{}^{-1})_n$ e $a_n{}^{-1})^n$ rispettivamente i seguenti valori

$$(8) \qquad a_n{}^{-1})_n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 \end{vmatrix} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$(9) \qquad a_n{}^{-1})^n = \frac{(-1)^n}{a_0^{n+1}} \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \ldots & 0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n-1}{0} a_{n-1} & \binom{n-1}{1} a_{n-2} & \ldots & \binom{n-1}{n-2} a_1 & \binom{n-1}{n-1} a_0 \\ \binom{n}{0} a_n & \binom{n}{1} a_{n-1} & \ldots & \binom{n}{n-2} a_2 & \binom{n}{n-1} a_1 \end{vmatrix}$$

(in cui i det. sono delle generalizzazioni del det. delle funzioni fratte al quale quello della (8) si riduce per $a_0 = 1$), dal confronto di (8) e (9) rispet-

[1]) Cfr. A. M., Mem. II, pag. 50, formule (50′) e (51′).

[2]) Cfr. A. M., Mem I, p. 133.

vamente con (1) e (2) si hanno gli sviluppi dei precedenti determinanti. sì risulta

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_0 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \end{vmatrix} = a_0^{n+1} . (-1)^n \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r} . a_0^{-(r+1)} ,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 2a_1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \binom{n-1}{0} a_{n-1} & \binom{n-1}{1} a_{n-2} & \dots & \binom{n-1}{n-2} a_1 & \binom{n-1}{n-1} a_0 \\ \binom{n}{0} a_n & \binom{n}{1} a_{n-1} & \dots & \binom{n}{n-2} a_2 & \binom{n}{n-1} a_1 \end{vmatrix} = a_0^{n+1} (-1)^n \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \binom{m}{r} a_0^{m-r}$$

$$\sum \binom{n}{i_1} \binom{n-i_1}{i_2} \binom{n-i_1-i_2}{i_3} \dots \binom{n-i_1-i_2-\dots-i_{p-1}}{i_p} a_{i_1} . a_{i_2} \dots a_{i_r} . a_0^{-(r+1)} .$$

4. Da due formule di A. Mambriani [1]), quando nel 2.° membro di esse sostituisca ad $a_n^{m-1)_n}$, $a_n^{m-1)^n}$ i valori che si ottengono con la (3) e la (4), hanno i valori della derivata isobrica e binomiale di $a_n^{m)^n}$ e $a_n^{m)^n}$ in funzione di a_n.

Inoltre, poichè dalla (29) di A. M. II pag. 40, si ha facilmente il seguente sistema

$$\begin{cases} -a_0 m_1^{m)_1} & = -ma_1 a_0^m \\ (m-1)a_1 a_1^{m)_1} - 2a_0 a_2^{m)_2} & = -2ma_2 a_0^m \\ (2m-1)a_2 a_1^{m)_1} + (m-2)a_1 a_2^{m)_2} - 3a_0 a_3^{m)_3} & = -3ma_3 a_0^m \\ (3m-1)a_3 a_1^{m)_1} + (2m-2)a_2 a_2^{m)_2} + (m-3)a_1 a_3^{m)_3} - 4a_0 a_4^{m)_4} & = -4ma_4 a_0^m \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ [(n-1)m-1] a_{n-1} a_1^{m)_1} + [(n-2)m-2] a_{n-2} a_2^{m)_2} + \dots + & \\ \qquad [m-(n-1)] a_1 a_{n-1}^{m)_{n-1}} - na_0 a_n^{m)_n} & = -nma_n a_0^m \end{cases}$$

cui determinante è uguale a $(-1)^n n! \, a_0^n$ e il determinante Δ' del numeratore della frazione che da $a_s^{m)_s}$ è

---

[1]) Cfr. A. M., Mem. II, pag. 39, formule (27) e (28).

$$\Delta' = (-1)^s \begin{vmatrix} a_1 & -a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 2a_2 & (m-1)a_1 & -2a_0 & \dots & 0 \\ 3a_3 & (2m-1)a_2 & (m-2)a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ na_n & [(n-1)m-1]\,a_{n-1} & [(n-2)m-2] & \dots & -na_0 \end{vmatrix},$$

risulta

$$a_s^{m)s} = \frac{\Delta'}{(-1)^n n!\, a_0^n}.$$

Perciò dal confronto della precedente, per $s=n$, con la (3), si ha lo sviluppo di Δ' cioè

$$\Delta' = (-1)^n\, n!\, a_0^n \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{m-r} \sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_r}.$$

Si noti che se in Δ', nel caso di $s=n$, si pone in evidenza $2, 3, \dots, n-1$ nella 3.ª, 4.ª, ..., n.ª colonna, si ha un determinante ricorrente [1]).

Infine dalla (30) di A. M. Mem. II pag. 40, si ha

$$\left\{\begin{aligned} & a_0 a_1^{m)^1} && = m a_1 a_0^m \\ & \left[\binom{1}{0} - \binom{1}{1} m\right] a_1 a_1^{m)^1} + a_0 m_2^{m)^2} && = m a_2 a_0^m \\ & \left[\binom{2}{0} - \binom{2}{1} m\right] a_2 a_1^{m)^1} + \left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} m\right] a_1 a_2^{m)^2} + a_0 a_3^{m)^3} && = m a_3 a_0^m \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\ & \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} m\right] a_{n-1} a_1^{m)^1} + \left[\binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{2} m\right] a_{n-2} a_2^{m)^2} + \dots + && \\ & \qquad + \left[\binom{n-1}{n-2} - \binom{n-1}{n-1} m\right] a_1 a_{n-1}^{m)^{n-1}} + a_0 a_n^{m)^n} && = m a_n a_0^m. \end{aligned}\right.$$

Il determinante di questo sistema è uguale ad a_0^n, il det. Δ'' del numeratore della frazione che dà il valore di $a_s^{m)^s}$ è invece

$$\Delta'' = (-1)^{s-1} m a_0^m \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & \left[\binom{1}{0} - \binom{1}{1} m\right] a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_3 & \left[\binom{2}{0} - \binom{2}{1} m\right] a_2 & \left[\binom{2}{1} - \binom{2}{2} m\right] a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & \left[\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} m\right] a_{n-1} & \left[\binom{n-1}{1} - \binom{n-1}{2} m\right] a_{n-2} & \dots & a_0 \end{vmatrix} \tag{10}$$

[1]) Cfr. E. Pascal, *I determinanti*, pag. 257 (1923).

uindi

$$a_s^{m'^s} = \frac{\Delta''}{a_0^n}$$

dal confronto di questa, ponendovi $s = n$, con la (4) si ha il valore di Δ''. 'isulta così

$$\Delta'' = a_0^n \sum_{r=1}^{n} \binom{m}{r} a_0^{m-r} \sum \binom{n}{i_1} \binom{n-i_1}{i_2} \cdots \binom{n-i_1-\ldots-i_{p-1}}{i_p} a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_r} .$$

Il determinante che figura nella (10) può, anch'esso, ritenersi una ge-
eralizzazione del determinante delle funzioni fratte.

Sul calcolo di alcuni cavalletti sollecitati a torsione

Nota del prof. **F. Jossa**, *presentata dal socio corr.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Si studia l' effetto di un momento torcente che agisce su un ritto di un cavalletto costituito da quattro ritti collegati con traversi in diversi piani; si ricercano le relazioni che nascono dall' eguaglianza delle rotazioni nelle sezioni comuni ai ritti e ai traversi e si mostra come esse possono notevolmente semplificarsi, introducendo alcune approssimazioni, delle quali si discute l' applicabilità. Si studia infine il comportamento del cavalletto, preso nel suo insieme, soggetto a un momento torcente agente in sommità di esso.

I. *Generalità.* — Si presenta alcune volte, nella tecnica, il caso in cui alla sommità di un cavalletto esistano forze agenti in un piano orizzontale che abbiano per risultante una coppia nel piano stesso: basta considerare il caso dei cavalletti per funivia. Le forze agenti nel piano orizzontale di sommità possono produrre momenti torcenti nei singoli ritti del cavalletto, i quali sono sempre, in qualche modo, collegati tra loro. Vogliamo appunto prendere in esame il caso in cui un momento torcente agisca direttamente su un ritto di un cavalletto.

Fissiamo la nostra attenzione sui cavalletti di cemento armato, divenuti ormai tanto frequenti; in essi, in generale, i ritti sono collegati in diversi piani orizzontali, a diverse quote, da traversi che irrobustiscono e irrigidiscono il sistema e che, nel caso presente si oppongono alla deformazione indotta dal momento torcente che agisce in sommità di ogni ritto, e producono momenti di segno opposto ad esso. Il sistema è a connessione multipla e si presenta, a prima vista, di difficile risoluzione; vogliamo invece mostrare come esso, non solo per considerazioni di simmetria, ma anche per particolari prevedibili rapporti tra le diverse incognite (almeno in via approssimata, come si spiegherà in seguito) si presti a notevoli semplificazioni e sia quindi accessibile anche dal punto di vista pratico numerico.

II. *Studio di un singolo ritto.* — Consideriamo anzitutto un ritto verticale, sollecitato in sommità da un momento torcente M_t; in diverse sezioni, alle quote x_1, x_2, x_3, esso sia collegato a traversi orizzontali, che abbiano l' altra estremità rigidamente incastrata, il tutto come nella figura 1. Al livello x_1, e per l' eguagiianza delle rotazioni nel ritto e nel traverso si avrà:

$$(M_t - M') x_1 - M'' x_2 - M''' x_3 = M' \frac{I_p}{4 I_q} \frac{G}{E} = M' \alpha \qquad (1)$$

ssendo:

M', M'', M''' i momenti indotti dai traversi, che risultano, com'è ovvio, ettenti per i traversi e torcenti per il ritto;

l la lunghezza dei traversi, supposta identica per tutti e tre;

I il momento d'inerzía della sezione trasversale dei traversi, che supponiamo per ora identico per i tre traversi;

I_p il momento d'inerzia polare della sezione trasversale del ritto, supposto per un momento costante alle diverse altezze; q il fattore di torsione, E e G, come di solito, i moduli di elasticità.

Ed ai livelli x_2 e x_3

$$(M_t - M' - M'')\, x_2 - M''' x_3 = \alpha M''$$
$$(M_t - M' - M'' - M''')\, x_3 = \alpha M''' .$$

Supponiamo che ora sia, come spesso si verifica in pratica,

$$x_1 = 3\, x_3 \qquad x_2 = 2\, x_3 .$$

Le (1) diventano:

$$[3\,(M_t - M') - 2M'' - M''']\, x_3 = \alpha M'$$
$$[2\,(M_t - M' - M'') - M''']\, x_3 = \alpha M''$$
$$(M_t - M' - M'' - M''')\, x_3 = \alpha M''' .$$

Fig. 1.

Sottraendo dalla seconda di tali equazioni la terza moltiplicata per 2, si ha:

$$\alpha M'' - (2\alpha + x_3)\, M''' = 0$$

mentre, sottraendo dalla prima la seconda più la terza, si ha:

$$\alpha M' - (\alpha + x_3)\, M'' - (\alpha + x_3)\, M''' = 0.$$

Tali equazioni sono, in quanto a struttura, generali, intendendo con ciò che, aumentando il numero dei traversi, il tipo di esse non cambia, mutando solo il valore dei coefficienti. Ad esempio, per un ritto con quattro traversi di collegamento, si avrebbe, seguendo la via sopra tracciata:

$$\alpha M''' - (2\alpha + x_4)\, M^{IV} = 0$$
$$2\alpha M'' - (3\alpha + 2x_4)\, M''' - x_4\, M^{IV} = 0$$

così via.

Importa allora anzitutto notare che, per la struttura stessa delle equazioni, i diversi momenti si ricavano con notevole semplicità uno successivamente all'altro. Ma poi basta riflettere che, se è possibile ritenere x_3 .

trascurabile di fronte ad α, si ottiene subito:

$$M'' = 2M'''$$
$$M' = 3M'''$$

ossia, in generale, i valori dei momenti indotti dai traversi variano proporzionalmente alla quota a cui sono siti i traversi stessi. Difatti, più generalmente, per un numero n di traversi e per un rapporto variabile

$$k^{(n)} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

si ha:

$$(M_1 - M')\,x_1 - M''x_2 \ldots - M^{(n)}x_n = M'\alpha$$

. . . .

$$(M_1 - M' \ldots - M^{(n-2)})\,x_{n-2} - M^{(n-1)}x_{n-1} - M^{(n)}x_n = M^{(n-2)}\alpha$$
$$(M_1 - M' \ldots - M^{(n-1)})\,x_{n-1} - M^{(n)}x_n = M^{(n-1)}\alpha$$
$$(M^1 - M' \ldots - M^{(n)})\,x_n = M^{(n)}\alpha$$

moltiplicando l' ultima per k_n e sottraendo dalla penultima, si ha, dopo riduzioni:

$$M^{(n)}\left[(k_n - 1)\,x_n + k_n\alpha\right] = \alpha M^{(n-1)} \tag{2}$$

da cui, se x_n è trascurabile di fronte ad α

$$M^{(n-1)} = k_n\,M^{(n)}. \tag{3}$$

E similmente, ponendo

$$k'_{n-1} = \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}$$

sottraendo dalla terz' ultima la penultima moltiplicata per k'_{n-1} e riducendo

$$\alpha M^{(n-2)} = M^{(n)}\left[\alpha k_n\,k'_{n-1} + (k'_{n-1} - 1)\,x_n\right]$$

e poichè è evidentemente

$$k'_{n-1}\,k_n = k_{n-1}$$
$$\alpha M^{(n-2)} = M^{(n)}\left[\alpha k_{n-1} + (k'_{n-1} - 1)\,x_n\right] \tag{4}$$

quindi, con la solita ipotesi,

$$M^{(n-2)} = k_{n-1}\,M^{(n)}. \tag{5}$$

Occorre però accertare se è consentita l' approssimazione ammessa. Evidentemente di ciò si può giudicare caso per caso, con molta semplicità. Ma in generale può dirsi che, poichè le sezioni trasversali dei ritti sono

otevolmente più grandi di quelle dei traversi, specie verso la base di essi, trascurare x di fronte ad α che è influenzata, oltre che da l, dal rapporto $\frac{I_p}{I}$, è spe... ammissibile, specie nei piani inferiori. D'altra parte, on si deve nè si può esagerare in tale semplificazione, perchè il ritenere empre x piccolo di fronte ad α comporta supporre una grande esilità dei raversi di fronte ai ritti, e quindi uno scarsissimo contributo alla resitenza a torsione che andiamo esaminando. In definitiva quindi riteniamo he possa dirsi:

1) Che il ritenere x trascurabile di fronte ad α è sempre ammissibile er calcoli di proporzionamento, e per indagare, applicando il metodo sopra sposto, (che, nella detta ipotesi, è semplicissimo) sulla efficacia dei traersi in relazione alla loro maggiore o minore robustezza.

2) Che in un calcolo più preciso, x sarà difficilmente trascurabile nei iani superiori, mentre sarà quasi certamente trascurabile in quelli infeiori (a meno di non voler molto aumentare la sezione trasversale dei traersi inferiori), e per conseguenza il numero delle incognite del problema iene notevolmente a ridursi.

3) Che, in ogni caso, il giudizio sulla detta approssimazione è facissimo, per la immediata paragonabilità di x e di α, e servirà sempre a recisare quantitativamente i concetti generici ora riportati, di ripiani superiori e inferiori, cioè a decidere fino a qual ripiano possa ammettersi la roporzionalità dei momenti alle distanze dalla base.

E richiamiamo specialmente l'attenzione del lettore sul n. 1, perchè, pplicando la semplificazione proposta, si perviene subito ad un risultato ratico, si ottengono subito i valori dei momenti indotti dai traversi, sia ure in solo ordine di grandezza; si può valutarne l'importanza, e consierare se è il caso di irrobustire i detti traversi, rinunziando però allora lla semplificazione detta. Nè ciò deve eccessivamente preoccupare, perchè, ome si è visto, anche la via più generale non è ardua, dato che le equaioni si risolvono successivamente e con notevole semplicità.

Circa la costanza del fattore α, da quanto or ora si è detto risulta che ssa non è ammissibile in pratica: difatti il momento di inerzia polare della ezione trasversale del ritto va normalmente aumentando verso la base, e pesso muta anche la sezione trasversale dei traversi. Di ciò non abbiamo nora tenuto conto, allo scopo di fermare prima l'attenzione soltanto sugli lementi più importanti; ma d'altra parte, supponendo, come in generale i verifica in pratica, che il ritto venga risegato in corrispondenza dei riiani, e mantenga sezione costante tra l'uno e l'altro ripiano, è ovvio che iesce semplice tener conto della variazione di α; perchè bisogna soltanto ostituire alla espressione (3), l'altra;

$$M^{n-1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} k_n \cdot M^n \qquad (3 \text{ bis})$$

e alla (5), come è facile verificare, l'altra;

$$M^{(n-2)} = \frac{\alpha_n}{\alpha_{n-2}} k_{n-1} M^{(n)} . \qquad (5 \text{ bis})$$

III. *Studio del cavalletto.* — Il caso che abbiamo trattato è fondamentale, ma non si verifica facilmente in pratica. Nella realtà si hanno invece in generale diversi ritti, collegati da traversi che vanno dall'uno all'altro ritto; spesso poi i ritti sono più o meno inclinati. Quest' ultimo elemento merita intanto un' indagine particolare; esso comporta che:

a) le sezioni sedi dei momenti torcenti M_t non giacciono in piani contenenti gli assi dei traversi, ma in piani inclinati a quello orizzontale per i detti assi, di un angolo eguale a quello di cui l'asse del ritto è inclinato alla verticale;

b) il momento che agisce in sommità di un ritto, in un piano orizzontale, ha una componente in un piano per l'asse del ritto, ha cioè una componente di flessione.

Tutti e due tali elementi conducono in definitiva alle stesse considerazioni. Difatti la non coincidenza del piano della sezione normale di un ritto con quello orizzontale che contiene l'asse del traverso, comporta che il momento torcente M' indotto dal traverso nel ritto non è esso stesso, con l'identico suo proprio valore, flettente pel traverso: ma invece tale momento flettente nel piano orizzontale per l'asse del traverso sarà eguale al momento M' moltiplicato per il coseno dell'angolo φ che l'asse del ritto forma con la verticale. E quindi, per conseguenza, il momento M' avrà anche una componente nel piano verticale eguale a $M' \operatorname{sen} \varphi$. In definitiva quindi, il momento M' che compare a primo membro dell'equazione (1) si scinde in un momonto componente agente nel piano orizzontale eguale a $M' \cos \varphi$, che compare a secondo membro della detta equazione, e in un momento componente $M' \operatorname{sen} \varphi$ che inflette il traverso nel piano verticale.

Allo stesso risultato, dell'esistenza di un momento nel piano verticale per l'asse del traverso e per analoghe ragioni, conduce l'altro elemento, relativo alla componente che il momento agente in sommità ha nel piano verticale detto, onde in definitiva il problema si presenta ora con la diversità, rispetto al caso dei ritti verticali, che esistono momenti flettenti nei piani verticali per gli assi dei traversi e in piani pei ritti. Ora noi intendiamo occuparci qui soltanto della torsione che si verifica nei ritti, collegati ad altri ritti o a punti fissi; e tanto più ciò può essere opportuno in quanto il comportamento a flessione del cavalletto, elemento fondamentale del problema di verifica di stabilità dello stesso, viene in generale esaminato con gli abituali metodi di calcolo, relativi agli schemi a portale o a trave tipo Vierendeel.

Fissiamo intanto le idee su un cavalletto a quattro ritti verticali, e

ıpponiamo che in sommità di uno di tali ritti venga applicato un momento ›rcente M_t; ciò si verifica senz'altro nell'ipotesi contemplata in fig. 2. Ora, ı ogni sezione, a livello dei diversi ripiani, occorre eguagliare la rotazione he si verifica nel ritto a quella che si verifica nel traverso quale facente arte di una maglia quadrangolare. In base a considerazioni analoghe a ıelle che conducono all'impostazione della equazione dei quattro momenti, potranno scrivere, per un cavalletto a tre ripiani intermedi, come più su stato descritto, invece delle (1), le :

$$\frac{l}{EI}(2M_1' + M_1'') = \frac{q^{x_3}}{GI_p}\left[3(M_{t_1} - M^I_{t_1}) - 2M^{II}_{t_1} - M^{III}_{t_1}\right]$$

. . . .

$$\frac{l}{EI}(2M_4' + M_4') = \frac{q^{x_3}}{GI_p}\left[3\,M^I_{t_4} - 2\,M^{II}_{t_4} - M^{III}_{t_4}\right]$$

›ve $M^I_{t_1}$ ad esempio, è il momento torcente nel ritto all'altezza immediamente al di sotto del ripiano *I*, e così via.

Applicando poi l'equazione dei quattro momenti alla maglia chiusa ›stituente il ripiano, si hanno le :

$$\begin{aligned} M'_1 + 2(M''_1 + M'_4) + M'_2 &= 0 \\ M'_4 + 2(M''_4 + M'_1) + M''_1 &= 0 \end{aligned}$$

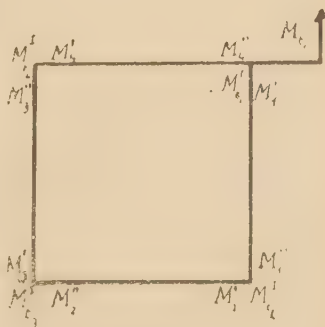
Fig. 2.

entre si ha poi, dalla statica:

$$M_t = M^I_{t_1} + M'_1 + M''_4$$

$$o = M^I_{t_2} + M'_2 + M''_1,$$

$$o' = M^I_{t_3} + M'_3 + M''_2$$

$$o = M^I_{t_4} + M'_4 + M''_3\,.$$

Onde, in definitiva, si avranno dodici relazioni tra le incognite per ouno dei ripiani del cavalletto; e tutte poi, per tutti i ripiani, formeranno ico sistema tra loro. Per rendere più agevole la materiale risoluzione l problema, è quindi opportuno cercare di scindere i diversi gruppi di uazioni, proprie dei diversi ripiani; e questo può farsi ammettendo, al- ɜno in via approssimativa, che gli M^{II}_t e M^{III}_t possono esprimersi in fun- ›ne di M^I_t, come è stato fatto nel coso semplice prima trattato. Si vede nque di quale importanza pratica è la semplificazione sopra discussa.

La soluzione delle dodici equazioni non offre intanto, com'è ovvio, la

difficoltà che offrirebbe in un caso generale: basta infatti sostituire nelle (6) i valori (8) per eliminare tutti gli M^2_{ts}; e altre semplificazioni si rinvengono procedendo per successive sostituzioni.

Non diversamente si condurrebbe il calcolo se i ritti sollecitati fossero più di uno. Ma se i momenti torcenti esterni, che agiscono in generale su tutti e quattro i ritti, sono, com'è frequente, di due soli valori distinti (essendo $M_{t_1} = M_{t_2}$ e $M_{t_3} = M_{t_4}$), considerazioni di semplice simmetria riducono il numero delle incognite a metà, stabilendo relazioni tra alcuni M facili a individuarsi, e del tipo:

$$M_1' = -M_1'' \quad , \quad M_4' = -M_2''$$
$$M_3' = -M_3'' \quad . \quad M_4'' = -M_2' .$$

Supponiamo ad esempio, che agiscano in sommità soltanto i momenti $M_{t_1} = M_{t_2}$ e sia

$$M_{t_1} = M_{t_2} .$$

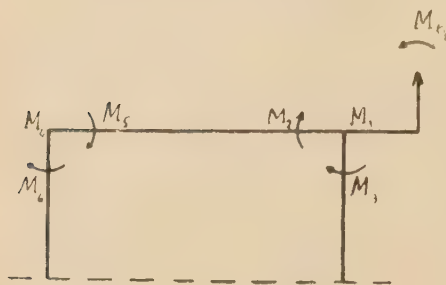



Fig. 3.

Tenendo conto dei segni, e con le notazioni stabilite in figura 3, si avrà:

$$\begin{aligned} -M_6 + 2M_5 - M_2 &= 0 , \\ M_5 - 2M_2 + M_3 &= 0 \\ M_{t_1} &= M_1 + M_2 + M_3 \\ M_4 &= M_5 + M_6 \\ \beta' M_{t_1} - \beta M_1 &= M_3 \\ -\beta M_4 &= 2M_5 - M_2 . \end{aligned}$$

conglobando in β il coefficiente di M_1, M_4 e in β' quello di M_{t_1}, supponendo che i momenti torcenti ai ripiani inferiori si esprimano semplicemente in funzione di M_1, M_4.

Da cui:

$$M_1 = \frac{\beta'}{\beta} M_t - \frac{M_3}{\beta} \qquad M_4 = -\frac{M_6}{6}$$
$$M_3 = 2M_2 - M_5 \qquad M_6 = 2M_5 - M_2$$

onde:

$$(\beta - \beta') M_{t_1} = (3\beta - 2) M_2 - (\beta - 1) M_5$$
$$0 = (3\beta + 2) M_5 - (\beta + 1) M_2 .$$

E, in definitiva:

$$M_5 = \frac{\beta + 1}{8\beta^2 - 3} (\beta - \beta') M_{t_1} \quad ; \quad M_2 = \frac{3\beta + 2}{8\beta^2 - 3} (\beta - \beta') M_{t_1}$$
$$M_3 = \frac{5\beta + 3}{8\beta^2 - 1} (\beta - \beta') M_{t_1} \quad ; \quad M_6 = \frac{-\beta}{8\beta^2 - 3} (\beta - \beta') M_{t_1} \qquad (9)$$
$$M_4 = \frac{1}{8\beta^2 - 1} (\beta - \beta') M_{t_1} \quad ; \quad M_1 = \frac{8\beta\beta' - 5(\beta - \beta') - 3}{3\beta^2 - 3} M_{t_1}$$

l problema diviene di facile soluzione, tanto più .h le (9) valgono sempre e il cavalletto è a pianta quadrata e abbia traversi di sezioni eguali tra o (ciò che in ..nerale è). Se il cavalletto ha pianta rettangolare, comriscono nelle equazioni dei quattro momenti le lunghezze dei lati della inta, ciò che non implica altro che il dover eseguire qualche computo più.

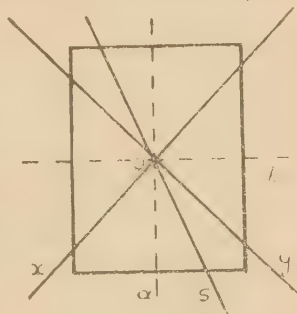
Nel caso particolare ora sviluppato, abbiamo ammessa la semplificaone accennata, della trascurabilità di x di fronte ad α; ma ove ciò non glia farsi, ci si potrà servire delle (2) invece delle (3), supponendole levoli per tutti i ritti egualmente.

In ultimo, del resto, si potrà controllare se i valori trovati degli M soddino le (6) e le analoghe per gli altri ripiani, e se il divario fosse notevole, rreggere i risultati tenendo appunto presenti tali divari, e ripetere il lcolo. È opportuno però allora, piuttosto, tener presente quanto segue

IV. *Il cavalletto soggetto a torsione nel suo complesso.* — Specie per sezioni lontane dalla sommità, si può esaminare, allo scopo di individuare ı semplicemente la sollecitazione all'altezza della sezione che considemo, qual'è il comportamento del cavalletto eso nel suo insieme, considerato cioè come un ido unico soggetto a un momento torcente. In ri termini, la sezione trasversale del cavalto risulta, nella considerazione che andiamo are, come costituita da quattro sezioni minori, elle dei ritti, mantenute dai traversi in modo variabile, così da costituire una sezione unica.

Fig. 4.

Supponiamo anche ora che i baricentri delle zioni dei ritti siano nei vertici di un quadrato. r effetto della torsione del complesso, la seone roterà intorno al proprio asse, e un punto l contorno, appartenente ad uno dei ritti, si muoverà lungo una circonenza che avrà per centro la traccia dell'asse sulla sezione.

Se esaminiamo più da vicino tale fenomeno, vediamo che, per effetto lla flessione nei ritti, che nasce dall'azione del momento torcente su tta la sezione, il baricentro, ad esempio, della sezione di un ritto tenderà spostarsi lungo la tangente alla circonferenza passante per i baricentri lle sezioni dei ritti stessi, di una certa quantità, che indichiamo con y. ı rotazione corrispondente, allora, intorno all'asse O sarà $\delta = \frac{y}{r}$, se inchiamo con r la distanza del baricentro del ritto da quello del cavalletto. intanto la tangente rappresenta l'asse di flessione, la diagonale conungente i centri delle sezioni di due ritti opposti rappresenterà l'asse utro: l'asse di sollecitazione, nel piano verticale pel quale agirà la forza F

producente la detta deformazione, sarà il coniugato della tangente rispetto all'ellisse centrale della sezione del ritto. La F in funzione di y sarà poi data, secondo quanto è noto, dalla:

$$y = \frac{Fh^3}{3EI} \quad \frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$$

se prendiamo in esame un riquadro del cavalletto, di altezza h e se indidichiamo con I il momento d'inerzia della sezione del ritto rispetto all'asse principale a, il tutto come dalla figura 4. Il momento torcente intorno all'asse O sarà allora ovviamente:

$$M_t = 4Fr\cos(\psi - \varphi)$$

e per la (10):

$$M_t = \frac{12\,EI\delta r^2}{l^3} \quad \frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\cos(\psi - \varphi).$$

Ed essendo d'altra parte:

$$\vartheta = q\,\frac{M_t\, l^2}{G\, I_p}$$

si ha:

$$q = \frac{1}{12}\;\frac{G}{E}\;\frac{I_p}{I}\;\frac{l^2}{r^2}\;\overline{\cos\psi}\;\frac{\cos\varphi}{\cos(\psi - \varphi)}\,.$$

Se il ritto è a sezione quadrata, si avranno, invece delle precedenti, le:

$$y = \frac{Fh^3}{3EI}$$

$$M_t = 4\,F\,r$$

$$q = \frac{1}{12}\;\frac{G}{E}\;\frac{I_p\, l^2}{I\, r^2}\,.$$

Ricavato il fattore di torsione q, si potranno subito determinare le sollecitazioni nella sezione del cavalletto, con notevolissima semplicità, e senza passare attraverso i più lunghi computi propri del metodo prima esposto.

Contributo allo studio sulle travi in cemento armato con mensole

Nota del dott. **Attilio Linari**, *presentata dal socio corr.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. – L' Autore esegue i calcoli statici delle travi, in cemento armato, con
ıensole, tenendo conto della effettiva variazione del momento di inerzia ed in
›nseguenza ottiene in mezzeria un momento flettente minore ed in incastro un
omento maggiore dei noti valori rispettivi che competono alle travi prismatiche.

Coll' irrigidimento dei tronchi di estremità, si diminuiscono gli sforzi unitari
un notevole tratto centrale e ne scaturisce un vantaggio economico notevolis-
no variabile al variare dei parametri caratteristici della forma della trave, i quali
terminano i valori dei momenti stessi.

Il problema è risolto sia per mensole rettangolari che triangolari tenendo an-
e conto della effettiva distribuzione del peso proprio. Oltre a ciò viene svilup-
to un calcolo per la determinazione (con una data altezza di mensola) del va-
re più conveniente della sua lunghezza per ottenere il minimo valore del mo-
ento in mezzeria.

Limitatamente alle mensole triangolari, che sono quelle maggiormente usate,
esposto un criterio che permette determinare i parametri per ottenere la mas-
na economia.

Premesse — Nelle costruzioni in cemento armato il criterio comunemente
ottato per i calcoli è il seguente: determinati i momenti positivi e negativi
una trave prismatica incastrata si passa al calcolo delle mensole solamente
alora la sollecitazione unitaria massima nel calcestruzzo supera i limiti
ıposti dai regolamenti. Ma il cammino da seguire è esattamente l' inverso:
›e occorre determinare prima i momenti flettenti applicando i teoremi
elasticità dei sistemi continui, tenendo conto di due membrature vera-
ente resistenti ed efficaci quali sono le mensole: tale calcolo è perfetta-
ente rigoroso e conforme ai dettami pratici della scienza delle costruzioni
assai razionale ed opportuno. Infatti col tener conto dell' irrigidimento
e le mensole conferiscono ai tronchi di estremità delle travi, risulta in
ezzeria un momento minore ed in incastro un momento maggiore dei noti
lori rispettivi che competono alla trave prismatica.

Questo fatto, diminuendo il momento ove la sezione è più esigua ed ac-
escendolo ove la sezione è più robusta ci conduce ad una trave il cui
mportamento si avvicina a quello di una trave di uniforme resistenza.

L' irrigidimento dei tronchi di estremità riesce a diminuire le solleci-
zioni in un notevole tratto centrale: da ciò risulta un' economia di ferro
calcestruzzo in dipendenza delle proporzioni delle mensole stesse.

L'aumento del momento in incastro che ne consegue (le mensole hanno per effetto di spostare la retta base del diagramma relativo ad una trave prismatica incastrata) è una percentuale più piccola del decremento subìto dal momento in mezzeria. Ma oltre a questo, tale aumento è compensato, agli effetti della quantità di ferro, dalla maggiore altezza della trave in incastro.

Ne consegue uno spostamento del punto di momento nullo, verso la mezzeria, spostamento che rende manifesto essere non esatto e pericoloso talvolta, nei travi con forti mensole, limitare i ferri al solo quinto della luce, come comunemente si usa, in quantochè non solo viene scoperto il diagramma dei momenti resistenti effettivi, ma anche per il fatto che la quantità di ferro, comunemente messa in incastro, è deficiente in dipendenza del maggiore aumento del momento negativo [1]).

I. Mensole rettangolari

a) Determinazione dei momenti

Si consideri una trave di luce l incastrata perfettamente agli estremi, sottoposta ad un carico uniforme q con mensole rettangolari estese sino ad una frazione $\frac{l}{n}$ della luce.

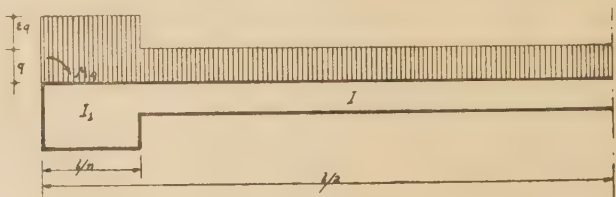



Fig. 1.

Per le formule di elasticità dei sistemi continui avremo (chiamato $B = \frac{I_1}{I}$ il rapporto dei momenti d'inerzia delle due parti):

$$\frac{1}{I_1}\int_0^{l/n}\left(\frac{q\,x^2}{2} - \frac{q\,l\,x}{2} - M'_A\right)dx + \frac{1}{I}\int_{l/n}^{l/2}\left(\frac{q\,x^2}{2} - \frac{q\,l\,x}{2} - M'_A\right)dx = 0$$

in cui M'_A è il momento d'incastro.

Integrando e risolvendo sarà:

$$M'_A = \frac{ql^2}{12} \cdot \frac{2(1-B)(3n-2) + Bn^3}{n^2[B(n-2)+2]} \tag{1}$$

[1]) Esempi di fabbricati lesionati. Cfr. Rivista « L'Ingegnere », anno 193[illegible] pag. 349.

Ed il momento in mezzeria sarà ancora:

$$M'_m = + \frac{q l^2}{24} \frac{(n-2)^3 (B-1) + n^3}{n^2 [B(n-2) + 2]} \tag{2}$$

La formula è valida sia per le mensole estese in altezza sia per quelle stese in larghezza (ad esempio nei solai con forati la soletta piena in incastro atta a resistere ai momenti negativi ha momento di inerzia maggiore i quello in mezzeria) sia per le travi a T dato che M'_A è funzione del apporto dei due momenti di inerzia all'incastro ed in mezzeria [1].

b) *Ricerca di M'_A massimo.*

Per un dato valore di B esiste un valore di n per cui il momento in .castro è massimo in valore assoluto. Dovrà essere:

$$F(n) = \frac{d M'_A}{dn} = 0$$

sviluppando sarà:

$$F(n) = n^3 - 6n^2 + 6\left(2 - \frac{1}{B}\right)n + 8\left(\frac{1}{B} - 1\right) = 0.$$

La soluzione dell'equazione di terzo ordine è del tipo:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0.$$

sto:

$$n - y - \frac{a}{3} - y + 2$$

(3) diventa:

$$y^3 - 3 p y - 2q = 0$$

---

[1]) Volendo tener conto anche del contributo M''_A che viene dato ai momenti peso delle mensole detto εq tale valore si ha:

$$\frac{1}{I_1}\int_0^{l/n}\left(\frac{\varepsilon q x^2}{2} - M''_A - \varepsilon q \frac{l}{n} x\right) dx + \frac{1}{I_1}\int_{l/2}^{l/n}\left(M''_A + \varepsilon q \frac{l^2}{2 n^2}\right) dx = 0$$

cui il momento risultante $M_A = M'_A + M''_A$ sarà:

$$M_A = - \frac{q l^2}{12} \frac{2(1-B)(3n-2) + Bn^3 + 2\varepsilon [4 + 3B(n-2)]}{[2 + B(n-2)] n^2}$$

r la mezzeria il momento risultante sarà ancora:

$$M_m = + \frac{q l^2}{24} \frac{(n-2)^3 (B-1) + n^3 + 8\varepsilon}{n^2 [B(n-2) + 2]}.$$

in cui:
$$p = \frac{a^2 - 3b}{9} = \frac{2}{B}$$
$$q = -\frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} = \frac{2}{B} .$$

Si distinguono tre casi:

1.° caso $\qquad p^3 > q^2 \qquad B < 2$

con tre soluzioni reali e distinte.

Posto:
$$\cos 3\varphi = \frac{q}{p\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{B}{2}}$$

la sola radice che soddisfa al problema e che ha un significato fisico (dato che $\varphi < 30^0$) sarà:

$$n_1 = 2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{B}} \cos\varphi\right)$$

2.° caso $\qquad p^3 = q^2 \qquad B = 2$

si ha un'unica radice reale ($n = 4$) che ha un significato fisico.

3.° caso $\qquad p^3 < q^2 \qquad B > 2$

si ha un'unica radice reale data da:

$$n = 2 + \sqrt[3]{\frac{2}{B}} \left\{ \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 - 2/B}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - 2/B}} \right\} .$$

È interessante notare che il punto fino a cui bisogna prolungare la mensola per un dato valore di B per ottenere il massimo valore assoluto di M'_A è punto di momento nullo.

Infatti l'ascissa x_0 del punto di momento nullo è data dalla:

$$M_x = M'_A - \frac{q\,x^2}{2} + \frac{q\,l\,x}{2} = 0. \tag{4}$$

Tenendo presente che la (3) può scriversi sotto la forma:

$$B = \frac{6n - 8}{(n-2)^3} \tag{5}$$

e sostituendo detto valore nell'equazione di M'_A dato dalla (1) si ha:

$$M'_A = -\frac{q\,l^2}{2\,n^2}(n - 1) \tag{6}$$

e sostituito nella (4) fornisce:

$$x_0 = l\,\frac{n \pm (n-2)}{2n}\,.$$

Le due soluzioni così ottenute definiscono i punti di momento nullo e ntemporaneamente i punti estremi delle mensole.

L'applicazione della (5) e della (6) nei casi della ricerca del punto di assimo semplificano il problema.

Si noti che nel caso che le mensole vengano spinte fino al punto di omento nullo il momento in mezzeria è uguale a quello di una trave semicemente appoggiata di luce $l - \frac{2l}{n}$ e quello in incastro a quello di una ensola di luce $\frac{l}{n}$ con carico uniforme e sottoposta ad un carico concenato all'estremità uguale alla reazione di appoggio di una trave di luce $-\frac{2l}{n}$.

II. Mensole triangolari

a) Maggiore importanza delle mensole rettangolari hanno quelle iangolari.

Detta h_x l'altezza variabile della mensola avremo:

$$\int_0^{l/n} \frac{1}{h_x^3}\left(\frac{qx^2}{2} - \frac{q\,l\,x}{2} - M'_A\right)dx + \frac{1}{h^3}\int_{l/n}^{l/2}\left(\frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2} - M'_A\right)dx = 0.$$

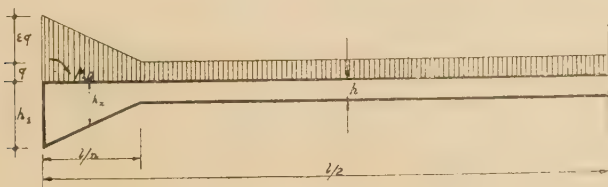



Fig. 2.

Posto $K = \frac{h_1}{h}$ sarà:

$$-\frac{q\,l^2}{12}\,\frac{K}{n^2(K-1)^3}\cdot\frac{n^3K(K-1)^3 - 6n(K-1)^2 + 2K(K-1)(2K^2-7K+11) - 12K\,lg_e K}{nK^2-(K-1)(2K+1)}$$

entre il momento in mezzeria sarà:

$$\frac{ql^2}{24}\cdot\frac{(K-1)^3[K^2(n-2)^3+3n^2(K+1)-12Kn]+12K^2(K-1)(K-3)+24K^2lg_e K}{n^2(K-1)^3\,[nK^2-(K-1)(2K+1)]}\,.$$

Il contributo dato al momento in incastro dal carico triangolare dovuto alla mensola è:

$$M''_A = - K\varepsilon q l^2 \cdot \frac{+6K lg_e K - 2K^5 + 9K^4 - 15K^3 + 8K^2 - \text{[illegible]} + nK(K-1)^4}{6n^2 (K-1)^4 \left[(n-2) K^2 + K + 1) \right]}$$

ed il momento risultante è $M_A = M'_A + M''_A$.

La quantità M''_A praticamente il più delle volte è trascurabile.

b) Ricerca di M'_A massimo.

Dato k si cerca il valore di n per cui M'_A è massimo in valore assoluto. Dovendo essere:

$$F(n) = \frac{dM'_A}{dn} = 0$$

si otterrà un'equazione del tipo:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

in cui:

$$a = - \frac{12K}{2K+1}$$

$$b = \frac{6(K-1)^5 (2K+1) + 6K^3 (K-1)(2K^2 - 7K + 11) - 36K^3 \, lg_e K}{K(K-1)^4 (2K+1)}$$

$$c = \frac{-4(K-1)(2K^2 - 7K + 11) + 24 \, lg_e K}{(K-1)^3}$$

Con semplici sostituzioni si ottiene analogamente alle mensole rettangolari:

$$p = \frac{-46K^3 + 12K^2 - 2}{K(K-1)^3 (2K+1)^2} + \frac{12K^2 \log_e K}{(K-1)^4 (2K+1)}$$

$$q = \frac{-92K^3 + 6K^2 - 96K - 34}{(K-1)^3 (2K+1)^3} + \frac{24K^3 + 36K + 12}{(K-1)^4 (2K-1)^3} lg_e K$$

in cui p e q sono i coefficienti della formula:

$$y^3 - 3py - 2q = 0$$

analogamente alle mensole rettangolari.

Il punto di momento nullo a differenza delle mensole rettangolari non è punto estremo della mensola.

III. Calcolo di massima economia per travi a sezione rettangolare con mensole triangolari

Dato che il va[illegible] di n che fornisce per un dato K il minimo valore momento in mezzeria può non corrispondere a criteri di minima spesa, e fatto un calcolo per le mensole triangolari (che sono quelle maggior-nte usate) di massima economia.

Fissata l'altezzza in mezzeria (solitamente l'altezza del trave è deter-nata da necessità costruttive per lasciar liberi i vani di porte e finestre), evidente che, per travi a sezione rettangolare, il maggior vantaggio eco-nico si avrà quando il calcestruzzo lavora al limite massimo imposto . regolamenti, dato che si può con tutta approssimazione considerare, un dato momento, l'area di ferro costante ed indipendente dalla lar-ezza della trave.

Infatti l'area del ferro è inversamente proporzionale al termine $h' - Y_1/3$, e varia entro limiti poco estesi al variare di σ_c.

Supposto l'altezza utile della trave $h' = 0{,}94\,h$ e tenuto presente che cemento a bassa resistenza ($\sigma_c = 50$ Kg/cmq. e $\sigma_f = 1200$ Kg/cmq. $M'_m =$ 60 bh^2 ed esprimendo il momento in tonnellate per metro e le dimen-ni della trave pure in metri detto C_c il costo unitario, il costo del cal-truzzo sarà:

$$C'_c = \frac{ql^3\,(n + K - 1)}{ha\,(58{,}60\,n)}\,C_c$$

cui a è il coefficiente che comparisce a denominatore dell'espressione e fornisce il momento in mezzeria che nel caso di travi prismatiche è uale, come è noto, a 24.

L'area del ferro in una relazione al momento sarà:

$$F_e = \frac{0{,}9829}{h\,a}\,ql^2$$

il costo totale del ferro occorrente (detto C_F quello unitario) sarà dato da:

$$C'_F = \frac{q\,l^3}{h\,a}\,0{,}77\,A\,C_F\ ^{1)}$$

cui A è un coefficiente variabile per tener conto dei monconi, sovrap-izioni, piegature, ganci etc. ma che si può assumere, da varie medie eguite, uguale ad 1,15 per travi nelle quali non occorrono staffe, e 1,50 .vi nelle quali lo sforzo di scorrimento è assorbito interamente dal ferro.

---

[1]) Si è assunto come peso specifico del ferro 7,85.

Secondo la tariffa del Comune di Napoli (anno 1935) si ha $C_F =$ L. 1.1[illegible] al Kg. $C_c =$ L. 120 al metro cubo. Per cemento ad alta il costo a metr[illegible] cubo del calcestruzzo aumenta di lire 12.

Ne consegue che il costo totale per il cemento [illegible]50 (assumendo in mezzeria il doppio del momento teorico) è dato da:

per $A = 1{,}15$

$$C_1 = \frac{ql^3}{ha}\left(2{,}48 + 4{,}09\,\frac{n + K - 1}{n}\right)$$

mentre per $A = 1{,}5$ sarà il costo dato da:

$$C_2 = \frac{ql^3}{ha}\left(3{,}23 + 4{,}09\,\frac{n + K - 1}{n}\right)$$

mentre per il cemento tipo 600 i valori rispettivi diventano:

$$C'_1 = \frac{ql^3}{ha}\left(2{,}53 + 2{,}96\,\frac{n + K - 1}{n}\right)$$

$$C'_2 = \frac{ql^3}{ha}\left(3{,}30 + 2{,}96\,\frac{n + K - 1}{n}\right).$$

Dalle formule che si possono ritenere sensibilmente esatte, perchè controllate anche da vari esempi, si può ritenere che il costo di una trave è direttamente proporzionale al cubo della luce ed al carico unitario, inversamente proporzionale all'altezza ed al coefficiente che determina il momento in mezzeria.

Dalle formule di costo apparisce ancora quale importanza abbia il contributo del calcestruzzo rispetto a quello dato dal ferro e la maggiore utilità dell'impiego del cemento tipo «600» rispetto al tipo «450» e questo contrariamente all'opinione comunemente diffusa fra i costruttori che il cemento ad alta sia solamente da usarsi per tipi di particolari costruzioni perchè antieconomico.

Si sono calcolati i momenti in mezzeria ed in incastro per 4.200 valori per K variabile da 1,10 sino a 5 ed n variabile da 2,10 sino al valore 25.

Assumendo sempre in mezzeria il doppio del momento flettente teorico si deduce da vari tentativi fatti che il valore più conveniente sarebbe per $K = 5$ ed $n = 2{,}3$ valori molto elevati che non consentono una razionale piegatura del ferro.

Si consiglia di mantenere $n = 3$ e di raccordare con pendenza 1 : 3 le mensole sino in incastro: ne risulta quindi un K variabile da trave a trave.

Si evita con questo sistema di dover fare un calcolo più laborioso per tener conto che agli effetti della ripartizione (e solamente per essa) degli sforzi di compressione nel calcestruzzo il regolamento vieta di tener conto

i pendenze maggiori. Di una più accentuata pendenza sarebbe lecito te-
ere debito conto agli effetti dei calcoli di K, M_A, M_m.

Il calcolo si può estendere ovviamente ai carichi concentrati comunque
ariabili, a travi appoggiate ad un estremo ed incastrate all'altro: in questo
ltimo caso l'effetto delle mensole porta a variazioni notevoli di momenti,
a come grandezza che come distribuzione, variazioni che sono tali da
oter pregiudicare seriamente la stabilità dell'opera, qualora si trascuras-
sero come del resto comunemente si usa.

Circa la piegatura dei ferri e la posizione delle staffe si osservi quanto
egue:

Nei metodi normali si procede alla determinazione della posizione dei
iegati in base al diagramma degli sforzi di taglio, procedendo in un se-
ondo tempo alla verifica col diagramma di momenti resistenti provvedendo
on l'aggiunta dei monconi in incastro qualora questo secondo diagramma
enga scoperto. Nel caso invece delle travi con mensole calcolate con i
riteri sopra esposti qualora si desideri ottenere la massima economia, è
onsigliabile di procedere in senso inverso, cioè di fare la piegatura dei ferr
i base al solo diagramma dei momenti resistenti, provvedendo con staffe
elle zone nelle quali il solo piegato è insufficiente a resistere agli sforzi
i scorrimento.

L'economia che così si ottiene per ossature comuni in cemento armato,
valutabile nell'ordine di un 20 % quantità tutt'altro che trascurabile.

Osservazioni di Urano e Cerere

Nota della Dott. **M. Viaro**, *presentata dal socio c. c.* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Si riportano 13 osservazioni del pianeta Urano e 15 del pianetino Cerere eseguite, dall'ottobre 1934 al marzo 1935, allo strumento dei passaggi di Bamberg.

Le ascensioni rette del pianeta Urano e del pianetino Cerere che riportiamo in questa nota, furono determinate fra l'ottobre 1934 e il marzo 1935 allo strumento dei passaggi di Bamberg.

Le condizioni strumentali e il metodo di osservazione, sono identici a quelli descritti per le « Osservazioni del pianeta Saturno » [1]), solo è da notare che negli ultimi giorni del gennaio 1935 all'orologio a pendolo Riefler 337 fu sostituito il Riefler num. 393 che nel frattempo era stato ripulito.

È inutile dire che Urano e Cerere, i quali apparivano a cannocchiale come dischetti molto piccoli, furono osservati nella maniera usata per le stelle orarie, cioè bisecandoli con il filo mobile e seguendoli per circa tre rivoluzioni.

Nella riduzione delle letture delle livelle non si tenne conto della irregolarità del diametro dei perni perchè gli studi esistenti [2]) danno correzioni trascurabili rispetto all'incertezza delle misure allora eseguite.

Le stelle di confronto usate per la determinazione delle ascensioni rette di Urano furono scelte fra quelle del Nautical Almanac, e le loro posizioni medie per il 1934 sono:

	α 1934			δ 1934		
ζ Piscium	1^h	10^m	$16^s.786$	$+ 7^0$	13′	36″.78
ϑ Ceti		20	43 .409	− 8	31	24 .11
η Piscium		27	56 .838	+ 15	0	22 .33
ν Piscium		37	59 .602	+ 5	9	15 .76
ο Piscium		41	54 .293	+ 8	49	35 .02
β Arietis		50	59 .324	+ 20	29	10 .32
υ Ceti		56	53 .676	− 21	23	48 .64
α Arietis	2	3	26 .809	+ 23	9	4 .49

[1]) *Contributi Astronomici*, Serie II, N. 8 Napoli 1935.

[2]) I: Differenza di longitudine fra Roma (Monte Mario) e Napoli (Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1909 da E. Bianchi, F. Contarino, N.

Le circumpolari, osservate quasi sempre in numero di due, furono scelte fra le seguenti

	α 1934			δ 1934			
α Ursae Min.	1^h	39^m	$6^s.350$	+ 88°	56′	55″.52	(Nautical Almanac)
344 Bradley	2	38	7 .878	81	10	17 .13	(Conn. des Temps)
6B Ursae Min.	12	14	36 .352	88	3	56 .72	(Nautical Almanac)
32_2 H Camelop.	12	48	38 .140	83	46	17 .72	(Conn. des Temps)
57 B Ursae Min.	14	58	19 .736	87	29	10 .61	(Nautical Almanac)
39 H Cephei	23	27	40 .525	86	56	36 .47	» »

Per Cerere invece le stelle di confronto furono tolte dal Berliner Astronomisches Jahrbuch e furono ridotte mediante l'opportuna correzione [1]) al FK3.

ζ Geminorum	7	0	11.772	+ 20	40	7.39	
ι Geminorum		21	37.845	+ 27	55	51.29	
ρ Geminorum		24	52.175	+ 31	55	3.12	
25 Monocerotis		33	59.841	— 3	57	44.34	
k Geminorum		40	27.987	+ 26	33	28.09	
π Geminorum		43	15.341	+ 33	34	45.44	
26 Lyncis		49	54.834	+ 47	44	14.73	
χ Geminorum		59	28.117	+ 27	58	51.04	
β Cancri	8	12	56.278	+ 9	23	24.72	
ε Hydrae		43	16.978	+ 6	39	43.60	
α Cancri		54	52.816	+ 12	6	51.49	
k Cancri	9	4	10.407	+ 10	46	5.76	(N. A.)

Per la k Cancri, che non è contenuta nella lista del Berliner Jahrbuch, ed ha un moto proprio annuo di $-0^s.0023$ fu assunta la posizione del Nautical Almanac, dopo avere osservato che per le altre tre stelle di confronto usate nelle medesime serate di osservazione, la differenza fra le posizioni medie del FK3 e quelle del Nautical Almanac sono:

			α_{FK3}	$\alpha_{N.A.}$	$\alpha_{FK3} - \alpha_{N.A.}$	Moto proprio annuo
β Cancri	8^h	12^m	$56^s.210$	$56^s.195$	$+0^s.015$	— 0.0011
ε Hydrae		43	16 .911	16 .905	+ 0 .006	— 0.0136
α Cancri		54	52 .738	52 .718	+ 0 .020	— 0.0012
					media = $+0^s.013$	

MOBILE, G. ZAPPA. Roma 1917. II: E. GUERRIERI *Irregolarità del diametro dei perni dello strumento di Bamberg del R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte.* Contributi astronomici, vol. I, n. 26.

[1]) *Reduktion des NFK auf den FK3 für 1925.0 und für 1934.5, 1935.5, 1936.5.* Anhang zum Berliner Astronomischen Jahrbuch 1936. (161. Jahrgang).

Le posizioni medie per il 1934 delle polari usate per la determinazione degli azimut strumentali durante le osservazioni di Cerere sono:

	α 1934			δ 1934			
51 H. Cephei	7ʰ	10	16ˢ.08	+ 87°	9′	16″.83	(Berliner Jahrbuch)
25 H. Camelop.	7	17	18 .338	+ 82	32	39 .46	(American Ephemeris)
4B Ursae Min.	8	32	1 .494	+ 88	49	40 .01	» »
Groomb. 3548	21	12	43 .870	+ 86	45	59 .78	(Nautical Almanac)

Come nella nota già citata « Osservazioni del pianeta Saturno » diamo qui per ciascun pianeta tre tabelle che contengono:

I e IV gli azimut strumentali,

II e V i Δt delle stelle di confronto ridotti all'istante della culminazione del pianeta,

III e VI il passaggio del pianeta in meridiano.

Per Urano furono determinati gli *O-C* mediante confronto con i valori dell'effemeride riportata nel Nautical Almanac. Per Cerere tale confronto non è stato possibile essendo l'effemeride della « Britisch Astronomical Association », data di quattro in quattro giorni, di carattere provvisorio.

TABELLA I — *Valori serali degli azimut strumentali (osservazioni di Urano)*

Ottobre	27	—0ˢ.466	—0ˢ.326	α Ursae Min.	39 H. Cephei
	30	—0 .599	—0 529	»	»
Novembre	17		—0 .114	—	»
	27	—0 .507	—0 .414	α Ursae Min.	»
	29	—0 .371	—0 .359	»	»
Dicembre	1	—0 .159	—0 182	»	6 B Ursae Min.
	6	—0 .211	—0 .311	6 B Ursae Min	39 H. Cephei
	8	—0 .325	—0 .464	»	»
	10	—0 .336	—0 .409	»	»
	22	—0 .217	—0 .347	»	»
	26	—0 382	—0 .491	32_2H Camelop.	57 B Ursae Min.
	28	—0 .513	—0 .339	344 Bradley	»
	31	—0 .359	—0 .389	6 B Ursae Min.	»

TABELLA II. - *Δt delle stelle di confronto ridotti all' istante della culminazione di Urano.*

Data		ζ Piscium	ϑ Ceti	η Piscium	ν Piscium	ο Piscium	β Arietis	υ Ceti	α Arietis
Ottobre	27			-0^m $39^s.422$				-0^m $39^s.463$	-0^m $39^s.463$
	30	-0^m $40^s.548$	-0^m $40^s.502$	40 .546					40 .601
Novembre	17		48 .583	48 .629			-0^m $48^s.693$		48 .659
	27		53 .897	53 .942			53 .926	53 .903	
	29		57 .188	57 .274			57 .196	57 .243	
Dicembre	1		58 .122	58 .174			58 .191		
	6			—1 0 .651	-1^m 0.645	-1^m $0^s.695$	—1 0 .640		
	8			1 .344	1.353	1 .323	1 .371	—1 1 .363	
	18			8 ·107	8.172		8 .123	8 .072	
	22		—1 10 .500	10 .561	10.570		10 .522		
	26		15 .071	15 .102	15.107		15 .115		
	28		16 .486	16 .514	16 553		16 .492		—1 16 .534
	31		18 .429	18 .427	18.439		18 .491	18 .486	

TABELLA III.

Data		Passaggio in meridiano del pianeta Urano			α calcolata	O — C	Condizioni meteorologiche
1934 ottobre	27	1^h	49^m	$40^s.838$	$40^s.74$	+ 0.10	Osservazioni difficili per la forte umidità
	30			13 .025	12 .91	0.12	
novembre	17	1	46	35 .277	35 .22	0.06	Cielo velato
	27	1	45	20 .069	20 .01	0.06	
	29			6 .481	6 .42	0.06	
dicembre	1	1	44	53 .406	53 .38	0.03	
	6			23 .369	23 .33	0.04	
	8			12 .456	12 .40	0.06	
	18	1	43	27 .691	27 .68	0.01	
	22			14 .844	14 .73	0.11	Cielo sereno all'inizio in seguito molto velato
	26			4 .737	4 .74	0 00	
	28			0 .913	0 .87	0.04	
	31	1	42	56 .586	56 51	0.08	

Media $+ 0^s.06 \pm 0^s.01$

Tabella IV. — *Valori serali degli azimut strumentali (osservazioni di Cerere)*

1934 novembre	24	— 0ˢ.388	— 0ˢ.345	4 B Ursae Min.	Groomb. 3548
	29	— 0.437	— 0.293	»	»
1935 gennaio	18	— 0.418		51 H. Cephei	—
	20	— 1.043		»	—
febbraio	3	— 0.883		»	—
	12	— 0.765	— 0.807	»	25 H. Camelop.
	15	— 0.867	— 0.718	»	»
	17	— 0.633	— 0.625	»	»
	18	— 0.714	— 0.821	»	»
	19	— 0.813	— 0.748	»	»
	20	— 0.925	— 0.868	»	»
	21	— 0.979	— 0.878	»	»
	27	— 0.755	— 0.750	»	»
marzo	3	— 0.794	— 0.735	»	»
	19	2.278	— 2.207	»	»

Tabella V. — Δt *delle stelle di confronto ridotti all' istante della culminazione di Cerere*

Data			β Cancri	ε Hydrae	α Cancri	k Cancri				
1934	novembre	24	— $51^s.805$	— $51^s.842$	— $51^s.834$	— $51^s.888$				
		29	56 .835	56 .771	56 .809	56 .842				
			ζ Gemin.	ι Gemin.	ρ Gemin.	25 Monocer.	α Gemin.	π Gemin.	26 Lyncis	χ Gemin.
1935	gennaio	18-19			—$1^m34^s.402$	—$1^m34^s.381$	—$1^m34^s.404$	—$1^m34^s.445$		—$1^m34^s.444$
		20				1 36 .805	1 36 .83β	1 36 .806		
	febbraio	3			1 14 .669	1 14 .603		1 14.604	—$1^m14.569$	
		12	—$1^m14^s.750$		1 14 .885		1 14 .837	1 14 .851		
		15	1 14 .993	—$1^m14^s.972$	1 14 .955	1 14 .867	1 14 .996	1 14 .953		
		17		1 15 .091	1 15 .078	1 15 .074	1 15 .039	1 15 .050		
		18		1 15 .126	1 15 .154		1 15 .133	1 15 .099		
		19		1 15 .149	1 15 .167	1 15 .253	1 15 .169	1 15 .122		
		20	1 15 216	1 15 .165	1 15 .205	1 15 .211	1 15 .217	1 15 .151		
		21		1 15 .201	1 15 .198	1 15 .163	1 15 .165	1 15 .158		
		27		1 15 .645		1 15 .595	1 15 .601	1 15 .596		
	marzo	3	1 15 .745	1 15 .809		1 15 .807	1 15 .782	1 15 .761		
		19		1 15 .149	1 15 .162	1 15 .170	1 15 .149	1 15 .147		

TABELLA VI.

Data		Passaggio del pianetino Cerere in meridiano			Condizioni meteorologiche
1934 novembre	24	8^h	20^m	$54^s.006$	Vento — osservazioni di Cerere difficili a causa del chiarore lunare.
	29	8	21	59 .844	
1935 gennaio	19	7	53	54 .184	Cielo a intervalli coperto.
	20	7	51	52 .621	
febbraio	3	7	38	34 .208	
	12	7	31	54 .274	
	15	7	30	9 .928	
	17	7	29	9 .254	
	18	7	28	41 .716	
	19	7^h	28	16 .023	
	20	7	27	52 .198	
	21	7	27	30 .273	
	27	7	25	59 .323	
marzo	[illegible]	7	25	37 .695	
	19	7	29	16 .727	

Napoli, R. Osservatorio di Capodimonte 10 giugno 1936 - XIV

Sulla trachite sanidinica vitrofirica della Punta della Lingua (Isola di Procida)

Nota del dott. **Antonio Parascandola**, *presentata dal socio corr.* **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — Da una serie di accurate osservazioni, si conclude che la trachite nera ad aspetto di colata lavica, che trovasi alla punta della Lingua, nell'Isola di Procida, è stata originata per atto eruttivo d'indole piroclastica.

Ad est dell'Isola di Procida, all'imboccatura del canale omonimo, v'è una stretta e corta striscia di roccia superficialmente nera scoriacea, che per la sua configurazione chiamasi « Lingua » donde il nome di « Punta della Lingua ».

La così detta colata trachitica che la costituisce appartiene ad un centro eruttivo ben distinto che io ho potuto riconoscere e determinare [1], nel corso di alcune mie ricerche sull'isola di Procida, nonostante il suo stato molto avanzato di degradazione, e che appartiene, quindi, al cratere detto Terra Murata sito ad est dell'isola.

Ciò che oggi rimane della originaria gettata lavica è rappresentato oltre che dalla suddetta breve striscia rocciosa, dagli antistanti scogli dello « Schiavone », e dai resti incassati sia nella insenatura della « Chiaia dell'Asino » che nella rupe soprastante la Punta della Lingua, detta « Punta di Ricciola », oltre che dai massi che si osservano ai piedi della rupe e più o meno sommersi nei paraggi.

Gli scogli dello Schiavone distano dalla Punta della Lingua di circa 75 metri, il più alto si eleva di circa 6 metri s. l. d. m. e vi si affonda per circa dieci metri.

Alla Punta di Ricciola la trachite ha uno spessore che si aggira intorno al metro e si adagia sul tufo giallo mentre è sormontata da una « breccia museo » di potenza maggiore.

Questa trachite, nella sua regione terminale nord, confinante con la spiaggia, ha tutto l'aspetto di una lava a breccia, mentre nel tratto che propriamente si nomina della « Lingua », emerge dal mare direttamente ed in questo si affonda a nord con una potenza di due metri circa.

Su questa interessante roccia, oltre alle antiche e necessariamente

---

[1]) Parascandola A., *I crateri dell' Isola di Procida* Boll. Soc. dei Naturalisti Napoli, Vol. 36, serie 2.ª, Vol. XVI, Napoli, 1924.

vaghe od incomplete osservazioni di ABICH [1]) e di A. SCACCHI [2]), si possiede un'analisi di NARICI [3]); egli dice di aver analizzato la roccia nera, molto vetrosa, ma con devetrificazione feldspatica abbastanza avanzata, presentante rari fenocristalli di sanidino sodifero, plagioclasio basico, ed augite diopsidica, costituente «la corrente lavica di Punta della Lingua» e la considera una trachite plagioclasica vitrofirica.

I dati analitici, ottenuti dal NARICI, sono riportati nella tabella A colonna I.

Io, nel ripigliare il mio studio sul cratere di Terra Murata, osservando la trachite in questione per lo studio delle forme di erosione, potetti convincermi che la roccia della Lingua, con i connessi scogli dello Schiavone e le similari formazioni che trovansi tra la Punta della Lingua e la Chiaia dell'Asino, fortemente richiamano le caratteristiche del piperno, al quale notevoli porzioni di questa trachite molto si avvicinano, così come molti grossi proietti della stessa « breccia museo »; e molte parti della roccia per nulla all'aspetto esterno possono differenziarsi dal piperno.

Va ricordato che il MERCALLI [4]) dice di aver trovato alla Punta della Lingua, « belle trachiti pipernoidi »; benchè non risulti chiaro di quali rocce intendesse parlare.

Questa trachite è costituita, come si osserva più evidentemente negli scogli dello Schiavone, da grandi focacce ovvero falde laviche le quali o sono a contatto tra loro, oppure sono intramezzate da una sostanza di color bigio cinereo, dove più dove meno abbondante, porosa, disseminata di numerosi proietti informi che sono della stessa natura delle focacce laviche.

Le falde laviche raggiungono dimensioni secondo l'asse maggiore anche più di un metro, ed emergono, dove l'erosione è progredita, dal seno della pasta bigio cinerea.

Presentano, però, una manifesta fluitazione e sono disseminati di cristalli di sanidino, dove più dove meno numerosi, disposti parallelamente tra loro, che raggiungono di frequente la lunghezza massima di un centimetro.

Tali cristalli di sanidino sono limpidi, incolori, a contorno esagonale, hanno habitus tabulare ed aspetto tipicamente vitreo. Essi sono, interi o

---

[1]) ABICH H., *Ueber die Natur und den Zusammenhang der vulkanischen Bildung*. Braunsweig, 1841.

[2]) SCACCHI A., *Memorie geologiche sulla Campania*. Rend. R. Acc. delle Scienze di Napoli 1850.

[3]) NARICI E., *Contributo alla petrografia chimica della provincia magmatica campana e del Monte Vulture* (con 93 nuove analisi) Zeitschrift für Vulk. Band XIV Napoli, 1932.

[4]) MERCALLI G., *I vulcani attivi della Terra*. Hoepli, Milano, 1907.

spezzati, irregolarmente diffusi anche nella pasta bigia porosa, in alcune porzioni delle quali risultano abbondanti e vi raggiungono anche le dimensioni di mm. 10×5×3.

Nella pasta bigia si osservano anche frammenti di sanidinite della grandezza di una noce e, inoltre, frammenti di rocce di natura differente da quella che costituisce le focacce e i proietti a queste simili che si trovano nella massa bigia; tali frammenti di rocce di natura differente, sono angolosi, taluno ha gli spigoli arrotondati, e non mostrano nessuna intima connessione, o, per meglio dire, aderenza con la massa bigia nella quale sono immersi; anzi pare che da questa vogliansi staccare con facilità e ciò osservasi non nelle superfici erose, bensì nei tagli freschi della roccia; la pasta bigia circondante tali frammenti è facilmente friabile sotto la semplice pressione delle dita.

Nelle zone, dove le tipiche focacce laviche sono sporadiche, si notano frequenti proietti lavici globulari o ellittici della lunghezza media di cm. 5 lungo l'asse maggiore per cm. 2,5 di spessore. Questi proietti sono in genere finemente vacuolari o leggermente spongiosi e nelle cellette lasciano vedere minutissimi aghetti di pirosseno rosso brunastro ed altri, più rari, di apatite incolora.

Talune falde laviche risultano di un fitto impasto di cristalli di sanidino; esse si presentano talvolta anche curvate ed in alcune si osserva, intorno ai proietti immersi in essa, la tipica stiratura a mandorla.

Nel complesso la massa trachitica ha subito, a causa del pendio, della grandezza e frequenza delle falde laviche, una lieve fluitazione o stiramento.

In qualche punto la trachite non è più in falde laviche ma in grossi proietti informi di circa mezzo metro cubo di volume.

Sia le falde che i proietti lavici sono in genere intimamente saldati alla sostanza bigia interposta, e gradualmente in essa si risolvono.

Ho osservato che alcune focacce laviche hanno una struttura micropipernoide poichè presentano delle microfiamme. Sono cioè esilissime listerelle parallele o subparallele di sostanza grigio nerastra divise da straterelli di sostanza bigio-chiara che richiamano il bigio in massa della sostanza interposta tra le grandi focacce.

Queste liste «a richiamo di fiamme pipernoidi» raggiungono la lunghezza di 2 o 3 centimetri ed uno spessore di qualche millimetro e sono intercalate con altre, separate sempre dalla sostanza bigia, che raggiungono lo spessore di un centimetro.

Qui non è agevole decidere se si tratti di vera e propria differenziazione magmatica (SCHLIEREN) avvenuta in una sosta del magma tra il serbatoio ed il condotto ovvero, qualche volta, d'intenso autometamorfismo avvenuto in roccia piroclastica caldissima e ricca di agenti mineralizzatori.

È da ritenersi senz'altro che la trachite in discoso non rappresenti una colata unica la quale abbia subito in seguito delle differenziazioni.

L'atto eruttivo che determinò la formazione di questa roccia dovette essere di natura esplosiva e, più esattamente, « di indole tufacea » ovvero « d'indole piroclastica »; vale a dire dovettero essere proiezioni a fontana o fontane di lava, di grosse falde laviche commiste a cenerume, a proietti magmatici coevi di dimensioni e forme varie, a proietti autigeni ed allogeni.

L'atto eruttivo, essendo stato rapido e continuo, la massa proiettata a causa della forte temperatura e di agenti mineralizzatori subì un autometamorfismo.

In numerose sezioni in posto la roccia in discussione dà la esatta concezione di questa proiezione mista per la straordinaria abbondanza di falde laviche stirate, parallele e subparallele, grandi e piccole, commiste con proietti vari nella pasta bigia.

Ho osservato che la pasta bigio-cinerea al disotto di vari proietti, di natura diversa dalla trachite che costituisce le focacce laviche, si è mantenuta incoerente. Ciò è una conferma dello stato originario detritico.

Nello studio delle forme di erosione della trachite della Lingua, dobbiamo far distinzione tra quelle nella roccia in massa e quelle che si osservano nelle focacce laviche.

L'azione erosiva operata dalla degradazione meteorica, e dalla salsedine marina, ha fatto emergere molte falde laviche come costoni che si trovano in buona parte liberate dalla pasta bigia, la quale per essere eminentemente porosa, è di necessità più facilmente disgregabile. Si formano perciò grandi e piccole carie secondo la massa della sostanza grigia intramezzata.

La pasta bigia che è ad intimo contatto con le falde laviche, e ne subì quindi metamorfosi, nel processo erosivo è la prima a cariarsi, formando una merlettatura sulla sottostante roccia lavica.

Nelle falde laviche l'erosione produce in genere lievi solchi paralleli che seguono in parte un maggior addensamento nella massa ad andamento parallelo di cristalli di feldspato che resistono meglio all'azione erosiva che non la pasta ipocristallina ch'è discontinua.

Però, osservando attentamente numerosi esempi di erosione in ispecie nelle focacce laviche, sono stato colpito dalla straordinaria abbondanza di tipi di erosione a fini solchi paralleli o sub-paralleli, o finemente alveolari, ma sempre parallelamente in genere disposti.

Talune forme di erosione mettono in rilievo la microfiamme dianzi descritte. In numerosi saggi l'erosione conserva tal perfetto parallelismo da indurre a pensare ad una fogliettatura della roccia. Tale tipo di erosione potrebbe chiamarsi « fogliettata o scistosa ».

Esaminando con ogni cura le fratture fresche e seguendo l'affondarsi nella massa del solco erosivo, ho osservato come questo vada lentamente

risolvendosi nella massa compatta e parta proprio dai fini straterelli di sostanza bigia minutamente porosa sicchè all'esterno emergono i foglietti lavici più resistenti.

È dunque lungo le zone bigio cineree meno consistenti di queste falde laviche che si avanza la erosione isolando gli straterelli più consistenti bigio nerastri a guisa di fogliettature parallele siccome son parallele le microfiamme della massa fondamentale delle focacce laviche.

L'erosione microalveolare è funzione, poi, della distribuzione e disposizione delle microfiamme.

Il tipo di erosione, quindi, ancora conferma l'origine di indole piroclastica di questa roccia.

Dai fatti ora esposti, non solo, ma dalla diversità di tipi litologici che nella « breccia museo » della Lingua si riscontrano, io ho creduto opportuno fare un'analisi della roccia in questione limitandomi a prelevare i saggi dalle grandi focacce e dalle piccole; da ognuna poi ne ho prelevati in punti diversi. Ho evitato con gran cura di prendere materiale alterato perchè i saggi sono stati presi nelle parti più fresche di ogni focaccia dopo cioè avere allontanato, per un conveniente spessore, le zone superficiali. Ho ottenuto così un campione medio della roccia che ho analizzato e che ha dato i risultati che presento alla tabella A, colonna III.

La roccia fu analizzata con i soliti metodi consigliati in questi casi.

Si rileva dal confronto di questi dati con quelli ottenuti dal Narici una netta diversità tra i materiali impiegati; la ragione è da ricercarsi nel modo stesso di estrinsecazione della roccia che fu, per quel che abbiamo detto, di tipo piroclastico, e, per quanto è stato esposto, ha potuto benissimo presentare differenziazioni le quali del resto sono molto spesso ben evidenti anche all'esame macroscopico.

Anzi tale divergenza nell'analisi è una conferma alle mie vedute sull'origine della roccia in questione.

I dati trovati dal Narici per la trachite della Lingua concordano con quelli della pomice vulsinitica degli Astroni [1]) (tabella A, colonna II) alla quale per i valori dell'allumina, calce e potassa si collega; come pure armonizza con la composizione, sempre negli Astroni, delle vulsiniti della Caprara, Pagliaroni e Rotondella. Nella pomice vulsinitica abbiamo Al_2O_3 19,83, CaO 3,67, Na_2O 3,59, K_2O 9,10; per gli stessi ossidi nella trachite della Lingua dall'analisi di Narici si ha rispettivamente 19,58, 3,18, 3,98, 9,02.

Nella roccia da me analizzata il tenore in SiO_2 è di poco inferiore a

---

[1]) De Lorenzo G. e Riva C., *Il cratere di Astroni nei Campi Flegrei.* Atti R. Acc. Sc. fis. e mat. di Napoli, Vol. XI, serie 2.ª, n. 9, 1902.

ıello della stessa località (60,76) analizzata da Lagorio [1]) (tabella A, conna IV), e si avvicina al tenore in SiO_2 della trachite fonolitica di Cuma [2]) 9,79) (tabella B, colonna III), della trachite di S. Elmo-Napoli [3]) (59,65) della 1.ª massa di trachite incontrata, e dal Freda studiata, nel tunnel Montesanto-Napoli [4]) (59,38).

Nelle fiamme del piperno di Soccavo e Pianura il tenore in SiO_2 è 60,42 [5]) ıentre nella parte bigia è 59,92; nella trachite sodalito-anortitica che forma ı gettata scoriacea del Monte Nuovo [6]) SiO_2 è 60,33.

Il tenore in Al_2O_3 nella roccia da me analizzata è più basso delle altre ıcce flegree, si aggira intorno a quelle delle ciminiti (14,71) ma concorda ol percento di allumina della trachite di Montesanto studiata da Johnston-avis [7]) (15,79) a cui si accosta anche per il tenore in ossido ferrico (6,81).

I valori dell'ossido ferrico sono avvicinati anche da quelli della ossiana della stessa località della Lingua (4,46), della trachite delle Cremate ,77) nell'isola d'Ischia, del piperno del Vomero-Napoli [8]) (4,14), della achite sodalite pirossenica di S. Elmo [9]) (4,74), della prima e seconda assa trachitica nel traforo di Montesanto [10]) (4,33 e 4,63).

L'ossido di magnesio è scarsissimo, inferiore a tutte le rocce flegree, ıve già ve ne è poco, ove se ne escludano quelle della Montagnella di

---

[1]) Lagorio A., *Ueber die Natur der Glasbasis, sowie der Krystallisationsvorgänge ı eruptiven Magma.* Tschermaks Mineralogische Petrographische Mittheilungen, ıg. 475, 1887.

[2]) Washington H. S., *Roman Comagmatic region.* p. 23, 1906.

[3]) Dell' Erba L., *Sulla sanidinite sodalite pirossenica di S. Elmo*, Rend. R. Acc. ɔ. Napoli, 1890.

[4]) Freda G., *Sulle masse trachitiche rinvenute nei recenti trafori delle colline di apoli.* Rend. Acc. Sc. fis. e mat. Napoli, III, 1889.

[5]) Zambonini F., *Il tufo pipernoide della Campania e i suoi minerali.* Mem. per rvire alla descrizione della carta geologica d'Italia. Vol. VII, parte II. Roma, 1919.

[6]) Dell' Erba L., *La sanidinite sodalito-anortitica di M. Nuovo.* Atti Acc. Pont., ol. XXIII. Napoli, 1893.

Washington H. S., *Roman comagmatic region* pag. 23, 1906.

[7]) Johnston-Lavis H. J., *On a remarkable Sodalite Trachyte lately discovered · Naples.* Geol. Magaz., III, vol. VI, 1889, pag. 74.

[8]) Freda G., *Sulla composizione del piperno trovato nella collina del Vomero e sul- origine probabile di questa roccia.* Rend. R. Acc. Sc. fis. e mat. s. II. vol. II Napoli 1888.

[9]) Dell' Erba L., *Sulla sanidinite sodalite pirossenica di S. Elmo. Studio petroafico e considerazioni geologiche.* Rend. R. Accad. Scienze, Napoli, 1890.

[10]) Freda G., loc. cit.

S.ᵗ Teresa [1]) in cui oscilla tra 2,46 e 4,03 e quelle di Fondo Riccio e deg Astroni le quali vanno riferite ad altri tipi; appena tracce ne riscontr LAGORIO nell' ossidiana della Punta della Lingua.

L' ossido di calcio (2,28) concorda con quello dell'ossidiana menzionat (2,07), con quello della trachite di Montesanto (2,24) e della trachite d S. Elmo (2,35); inferiore è nella trachite del Monte Nuovo (1,15).

Nella trachite fonolitica di Cuma è 1,19 e nelle fiamme del piperno 1,88 mentre sale nella parte bigia dello stesso a 2,07.

Gli alcali nella roccia analizzata sono notevoli; quasi uguale è il tenor tra gli ossidi di sodio e potassio, ma il secondo è di poco superiore al primo

Il tenore in alcali dell'ossidiana della punta della Lingua, analizzat dal LAGORIO, pure aggirandosi attorno ai dati delle comuni trachiti alcalin dei flegrei, è inferiore a quello della trachite della Lingua la quale per i tenore in ossido di potassio si avvicina alle trachiti delle Cremate (7,38) del Rotaro (7,60) nell'isola d'Ischia, di S. Elmo (7,29) e Montesanto (7,27 tab. B, col. V.

Nel piperno abbiamo, nelle fiamme, per gli ossidi di sodio e potassio rispettivamente, 6,13 e 7,32, mentre negli stessi abbiamo nella pasta bigia 6,32 e 7,01; questi valori sono molto vicini a quelli da me trovati per la trachite della Punta della Lingua.

La trachite sodalite anortitica di Monte Nuovo più si avvicina alla trachite della Punta della Lingua da me analizzata per il suo tenore in alcali essendo Na_2O 7,15 e K_2O 7,30 e v'è conservato anche uguale il rapporto fra soda e potassa.

Dall'analisi da me fatta si rileva che il tenore in alcali della trachite in studio è maggiore di tutte le altre rocce flegree fino ad ora analizzate ed è solo avvicinata dalla trachite augitica di Marecocco e dalla trachite ossidianica del Rotaro di Ischia, dalla trachite di Cuma, dal piperno di Soccavo e Pianura ed é armonizzante con la trachite di Monte Nuovo.

La trachite della Lingua è di colore nero in superficie, ma cinereo-scuro nella frattura: rompendola si trovano delle produzioni capillari di un minerale in sottilissime fibrille brune, esili e delicate che ricordano con evidenza la breislakite della trachite del Monte Olibano.

La roccia analizzata al microscopio rivela una pasta vetrosa con devetrificazione ben pronunziata sull' orlo delle piccole cavità con formazione di sanidino. I fenocristalli sono rappresentati in ordine di frequenza da sanidino sodifero, plagioclasio e poca augite.

L' estinzione massima del plagioclasio nella zona di simmetria è di 25° e ciò lo rapporta ai tipi con il 45 % di anortite. È in lamelle fini geminate secondo la legge dell' albite, ogni tanto cuneiformi; raramente presenta

[1]) STELLA STARRABBA F., *Il cratere di S. Teresa nei Campi Flegrei.* Atti R. Accad. Scienze fis. e mat. Napoli. (II), vol. XIV, n. 7, pag. 7, 1910.

qualche fine lamella geminata secondo la legge del periclino. Questi cristalli sono appiattiti secondo (010).

L'augite è colorata in verde chiaro, senza pleocroismo; è in piccoli cristalli prismatici accorciati limitati dalle facce solite (100) (010) (110) e ($\bar{1}$11).

Nel tufo di Socciaro (Isola di Procida) si rinvengono anche proietti trachitici simili nell'aspetto alla trachite della Lingua, ma scarsi, in generale, vi sono i fenocristalli di feldspati; al microscopio si osserva una pasta tutta vetrosa che in alcuni saggi presenta una devetrificazione abbastanza avanzata, mentre in altre il vetro è inalterato. I fenocristalli vi sono tutti scarsi ed in ordine di frequenza sono: poco sanidino sodifero, poca augite, poca magnetite.

Nella Breccia della Lingua è da notarsi la straordinaria varietà di tipi litologici e la enorme quantità di proietti magmatici coevi eruttati. Sono proietti ossidianici informi o figurati abbondantissimi, quasi tutti ricchi di feldspati che li rende estremamente fragili. Sono pomici spongiosissime di colore vario, alcune delle quali rappresentano un vero impasto di sanidino che talvolta è sofflato e con i filamenti anastomizzantisi con quelli della pasta vetrosa. In tali pomici il sanidino è sovente accompagnato, subordinatamente, da laminette brune di biotite, a contorno esagonale, allungate (2-5 mm.).

Questi impasti sanidinici con vetro spongioso o compatto stanno a dimostrare l'avanzato stato di segregazione e differenziazione magmatica all'atto della esplosione la quale dovette essere, quindi, tardiva facendo soggiornare a lungo il magma tra il condotto ed il serbatoio e dando luogo così, concorrendo le azioni pneumatolitiche, a tutti quei prodotti differenziati che al magma stesso si riferiscono.

Per la loro natura gli impasti sopra detti non possono essere i rappresentanti fedeli della composizione del magma.

Nella breccia della Lingua sono stati rinvenuti dal RITTMAN dei proietti basaltici con abbondanti fenocristalli di olivina, la cui pasta è formata da microliti di plagioclasi, augite, olivina e magnetite. I microliti di plagioclasio sono assai basici fra 70 e 90 % di An. La struttura è la intersertale. Nel citato lavoro di NARICI è anche riportata un'analisi di basalto olivinico ad ilmenite della Breccia della Lingua.

Le sanidiniti che si rinvengono nella breccia sono varie: talune risultano di sanidino ed orneblenda, quasi in eguali rapporti, e poca mica; altre sono costituite da molto sanidino, poca augite, e mica. Talune si sfasciano con facilità sotto leggieri colpi di martello ed anche fra le dita e risultano essenzialmente costituite da feldspati; fra gli elementi colorati vi si riconoscono subito laminette a contorno esagonale di mica bruna. In molte di queste sanidiniti si nota in ordine di frequenza feldspato alcalino (sanidino),

feldspato della serie oligoclasio-andesina, biotite, orneblenda, zircone, magnetite, titanite, augite, apatite.

Fa osservare RIVA [1]) che i feldspati della serie oligoclasio-andesina si trovano anch'essi in quantità notevoli, quantunque inferiori assai a quelli del sanidino; il loro peso specifico va fra 2,64 a 2,65. Dai cristalli con 24-25 % di anortite si sale a quelli col 40 %.

RIVA fa notare che i feldspati di molte trachiti dei Campi ed Isole Flegree hanno indici di rifrazione che sono nettamente superiori a quelli del comune sanidino potassico e che coincidono invece con quelli del sanidino sodico o dell'anortose delle Azzorre, Pantelleria, Mont-Dorè e di Porto Scuso in Sardegna.

Sicchè si può affermare che molte trachiti di varii centri eruttivi dei Campi ed Isole Flegree sono caratterizzate per contenere feldspati alcalini della serie sanidino sodico-anortose, la qual cosa è in relazione col carattere alcalino delle trachiti stesse come le varie analisi chimiche confermano.

Queste osservazioni del RIVA hanno particolare importanza perchè la presenza e diffusione del feldspato alcalino del tipo anzidetto nelle innumeri sanidiniti della breccia della Lingua danno ragione dell'elevato tenore in alcali della roccia da me analizzata ed ancora spiegano l'evato tenore in Na_2O da me trovato che nelle altre rocce flegree è inferiore.

Per l'insieme delle osservazioni esposte nel presente lavoro, credo opportuno che si debba ritenere una trachite sanidinica vitrofirica la roccia della quale ho trattato la quale è una tipica trachite alcalina.

La roccia, quindi, da me analizzata trova il suo posto nella classificazione delle rocce ignee del WASHINGTON tra le flegrosi sodipotassiche della classe delle persalane, ordine perfelico, rango peralcalico, come le trachiti augitiche di Marecocco e del Monte Rotaro nell'isola d'Ischia, la trachite sodalite anortitica del Monte Nuovo, la trachite fonolitica di Cuma, il piperno di Soccavo e Pianura.

È importante rilevare queste analogie fra la roccia in esame e quelle citate, in ispecie poi col piperno col quale la trachite della Lingua ha stretti legami di struttura e giacitura. Abbiamo infatti in essa rilevato la struttura pipernoide e l'intima relazione che ha con la potente « breccia museo ».

Già il WASHINGTON e poi lo ZAMBONINI ebbero a constatare le analogie intercorrenti tra il piperno, la trachiti fonolitica di Cuma ed i blocchi lavici del Monte Nuovo.

A conferma di quanto già scrissi in altro mio lavoro [2]), faccio rilevare

---

[1]) RIVA C., *Sopra due sanidiniti delle isole Flegree con alcune considerazioni intorno all'impiego dei liquidi a noto indice di rifrazione per la determinazione dei minerali componenti le rocce.* Rend. R. Acc. Lincei, vol. IX, fasc. 6.°, II sem. Roma, 1900

[2]) PARASCANDOLA A., *Note geomorfologiche su alcuni crateri insulari e continentali flegrei.* Atti XI Congresso Geografico Italiano, Napoli, 1930.

la diffusione dei tipi pipernoidi nello spazio e nel tempo ed i graduali passaggi tra le manifestazioni del primo e del secondo periodo di attività dei Campi Flegrei, avendo noi nei vulcani misti flegrei, tipo la generalità dei vulcani di Procida e Monte di Procida, anelli di congiunzione fra i due primi periodi del dinamismo eruttivo dei Flegrei stabiliti da DE LORENZO [1]) nella cronologia dell' attività vulcanica della regione.

Debbo osservare che dalle analisi del piperno fatte da ZAMBONINI si rileva la identità di costituzione chimica fra le fiamme e la pasta bigia. Molti ritengono il piperno essere fuoriuscito in forma continua e che le fiamme rappresentino segregazioni; a me sembra che se così fosse dovrebbe esservi differenza nei dati analitici delle due parti, la nera cioè e la bigia.

La concordanza fra i dati analitici delle due parti indurrebbe a ritenere il piperno originatosi per eruzione di indole piroclastica [2]) anzicchè un magma estrinsecato in forma continua e poi differenziatosi. Forse fu l' alta temperatura e la presenza, e magari la ricchezza di agenti mineralizzatori che metamorfosarono in posto la roccia. Del resto appare strano come prodotti dello stesso centro eruttivo siano stati proiettati e diffusi lontano dal punto di origine tanto caldi e ricchi di agenti mineralizzatori da formare il tufo grigio pipernoide della Campania, mentre l' ancor più alta temperatura e la maggior copia degli agenti mineralizzatori non abbia potuto analogamente e con maggiore efficacia trasformare, vicino al luogo stesso di origine, dei prodotti originatisi per via di accumulo sì da far perdere loro ogni traccia della primitiva natura piroclastica.

I fatti da me esposti mirano, fra l' altro, anche, a mettere in rilievo le analogie di origine fra la roccia da me studiata ed il piperno, ed a mostrare come sulla superficie della terra si rinnovino con ritmo sempre continuo le stesse forme e gli stessi fenomeni.

---

[1]) DE LORENZO G., *The history of volcanic action in the Phlegraean Fields.* Quart. Journ. Geolog. Society, vol. LX. Londra, 1904.

[2]) DELL' ERBA L., nel suo lavoro: *Considerazioni sulla genesi del piperno.* (Atti R. Accad. Scienze fis. e mat. di Napoli, Vol. V, ser. II, n. 3 1892), ritiene il piperno originatosi per eruzione di indole tufacea.

Tabella A

	I	II	III	IV	V	VI
SiO_2	59.76	58.35	59.54	60.76	61.88	57.31
Al_2O_3	19.58	19.83	15.12	20.08	18.06	14.71
Fe_2O_3	1.41	0.98	5.33	4.46	2.19	1.21
FeO	1.22	2.37	1.16	n. d.	1.38	4.37
MgO	0.28	0.90	0.11	tr.	0.61	7.80
CaO	3.18	3.67	2.14	2.07	1.15	6.90
Na_2O	3.98	3.59	8.03	5.70	6.89	1.35
K_2O	9.02	9.10	8.81	6.31	6.72	6.38
$H_2O + 110^0$	0.38	0.96	0.09	1.37	0.37	0.18
$H_2O - 110^0$	0.12		0.11			
TiO_2	0.46	0.30	0.10		0.69	0.40
P_2O_5	0.13	tr.	0.11		0.07	0.31
MnO	0.15	—	0.11			
CO_2	(Nace)				assente	
Cl_2	0.34		—		0.30	
SO_3	—				0.05	
BaO	tr.		tr.		0.08	
SrO	tr.		tr.			
ZrO_2					0.08	
	100.14	100.05	100.79	100.67	100.52	101.06

I. Trachite plagioclasica vitrofirica. Lava di Punta della Lingua (anal. Narici).

II. Vulsinite (pomice). Astroni (anal. Riva).

III. Trachite sanidinica vitrofirica. Punta della Lingua (anal. Parascandola).

IV. Ossidiana trachitica. Punta di Ricciola (anal. Lagorio).

V. Trachite. Marecocco. Ischia (anal. Washington).

VI. Ciminite. La Colonnetta. M.te Cimino.

TABELLA B

	I	II	III	IV	V.
SiO_2	60.42	59.92	59.79	60.33	57.91
Al_2O_3	18.78	18.57	19.05	18.27	15.79
Fe_2O_3	2.76	2.80	2.95	2.84	6.81
FeO	0.64	0.36	1.08	1.29	0.01
MgO	0.42	0.57	0.36	0.38	1.66
CaO	1.88	2.07	1.19	1.15	2.99
Na_2O	6.13	6.32	6.79	7.15	6.01
K_2O	7.32	7.01	7.10	7.30	7.27
H_2O +	0.70	0.82	0.24	0.56	0.34
H_2O —	0.11	0.14	....	....	....
CO_2	ass	tr.	ass.	ass.	....
TiO_2	0.41	0.42	0.56	0.43	0.65
P_2O_5	0.04	0.05	0.10	0.04	0.01
SO_3	tr.	tr.	ass.	ass.	ass.
Cl	0.27	0.49	0.53	0.43	0.61
MnO	0.22	0.22	n. det.	n. det.	0.23
BaO	0.01	0.01	....	....	....
	100.14	99.77	99.74	100.17	100.29
O equiv. a Cl	0.06	0.06			
	100.08	99.66			

I. Grandi fiamme: piperno del letto inferiore di Soccavo. Anal. F. ZAMBONINI.

II. Parte chiara fra le grandi fiamme: piperno del letto inferiore di Soccavo. Anal. F. ZAMBONINI.

III. Trachite fonolitica di Cuma (Cumal flegrose) Anal. H. S. WASHINGTON.

IV. Trachite fonolitica del Monte Nuovo (Cumal flegrose) Anal. H. S. WASHINGTON.

V. Trachite-Montesanto. H. S. JOHNSTON-LAVIS.

Napoli, Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli, giugno 1936 - XIV

Su di una miscela salina fluita alla base del conetto eruttivo nel cratere del Vesuvio

Nota del dott. **Armando Schiano**, *presentata dal socio corr.* **E. Quercigh**

(Adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV)

Sunto. — È stata studiata una formazione salina derivata con sicurezza da consolidamento di una fase liquida eruttata alla base del conetto del cratere vesuviano il 14 febbraio 1936. Si è dimostrata la presenza di circa 75 °/₀ molecolari di silvite e 25 °/₀ di alite.

Si sono constatati inoltre: il cloruro ferroso anidro il quale con tutta probabilità è unito al cloruro di potassio ed al cloruro di sodio formando la rinneite, il cloruro manganoso anidro che convalida l'ammissione, al Vesuvio, del minerale scacchite ed il cloruro ramico anidro.

Il 14 febbraio 1936, nel cratere del Vesuvio, alla base del conetto, furono osservati dal prof. Giuseppe Imbò, Direttore dell'Osservatorio Vesuviano, dei rigurgiti di materia fusa, mobilissima, incandescente, che, dopo solidificazione, poterono essere staccati e raccolti, ed alcuni campioni dei medesimi furono gentilmente, dal prof. Imbò, donati all'Istituto di Mineralogia della R. Università di Napoli.

Un grosso frammento, del peso di circa 400 grammi, di queste piccole colate saline, forma oggetto delle ricerche da me eseguite e delle quali espongo i risultati.

La massa esaminata si presenta complessivamente compatta, con superficie esterna variamente colorata in gradazioni che dal verde chiaro passano al verde sporco, al bruno più o meno cupo fino al nero, oppure dal giallastro all'aranciato e al colore marrone, colorazioni che provengono dai soliti prodotti di ossidazione superficiale formatisi all'alta temperatura alla quale il materiale fu espulso e posto in contatto dell'aria.

Questa patina superficiale, che per la sua esiguità non permette identificazione dei composti presenti, è alquanto deliquescente all'aria ambiente e si risolve lentamente in un liquido giallo sporco a reazione acida.

Alla rottura, le parti interne si presentano, macroscopicamente, di apparente omogeneità, con tinta bianca leggermente lattea di aspetto perlaceo,

.terrotta da qualche rarissimo cristallino di pirosseno verosimilmente tra-
ortato e conglobato, durante il percorso, dalla massa fusa.

La compattezza della massa è qua e là interrotta da piccoli vacuoli
otondeggianti sulla cui superficie, perfettamente liscia, non è possibile
corgere alcun accenno di individui cristallini.

La superficie di rottura, ottenuta per frammentazione del materiale, si
resenta senza alcuna regolarità e senza costanza di direzione, cosicchè si
a la chiara impressione di trovarsi in presenza del prodotto microcristal-
no della solidificazione rapidissima di una miscela salina che si trovava
llo stato di completa fusione. Per esposizione all'aria, la frattura fresca
elle porzioni interne ingiallisce rapidamente con una leggiera delique-
cenza, assumendo gradatamente una tinta aranciata.

Al microscopio polarizzatore la sostanza polverizzata si presenta come
ostituita, per la quasi totalità, da sostanze otticamente isotrope con qualche
arissimo punto birifrangente che, per la sua esiguità, non si presta ad ul-
eriori precisazioni.

Il peso specifico, determinato sul materiale inalterato, risultò di 2,06
nedia di due determinazioni).

Questo materiale salino è solubile senza residuo in acqua distillata ma
a soluzione incolora, a reazione acida, che ne risulta, si intorbida rapi-
amente ingiallendo e lascia col tempo depositare una leggiera quantità
i idrossido ferrico.

All'analisi risulta formato per la quasi totalità da cloruri di potassio
sodio con piccole quantità di ferro, rame, manganese e tracce di acido
olforico; non vi si riscontrano, analiticamente, gli altri elementi che finora
urono talvolta osservati nelle sublimazioni e formazioni saline del Vesuvio.

Le determinazioni quantitative su due porzioni diverse, (I) e (II), del
nateriale, preparate e scelte con le dovute cautele, hanno rivelato la se-
guente composizione:

	(I)	(II)
Cu	0.38	0.36
Fe	0.46	0.47
Mn	0.51	0.52
K	35.53	35.39
Na	11.71	11.68
Cl	51.29	51.26
SO_4	0.17	0.17
	100.05	99.85

Per quanto riguarda i costituenti mineralogici della formazione in e-
same risulta evidentemente, dai dati analitici e dalla isotropia ottica os-

servata, che ci troviamo, essenzialmente, in presenza di miscele di alite e silvite. Questi due minerali si trovano presenti nelle proporzioni molecolari di circa 75 % di silvite e 25 % di alite.

Da queste proporzioni si può dedurre che la temperatura all'emissione della miscela salina fusa, ha dovuto essere certamente superiore ai 700°, poichè, come è noto, al di sopra di questo limite sta il campo di esistenza della fase liquida corrispondente.

È notevole questo caso, per la prima volta pienamente confermato, di formazione, al Vesuvio, di soluzioni solide di alite e silvite direttamente per cristallizzazione della fase liquida. È evidente che tali cristalli misti, formatisi in un primo tempo, si siano poi coll'abbassarsi della temperatura smistati, dando luogo ad una miscela microcristallina dei due componenti.

Verosimilmente la massa da me esaminata rappresenta il risultato di un processo di sublimazione interna verificatosi in un primo tempo, mentre consecutivamente, per un aumento di temperatura, i prodotti della sublimazione dovettero essere portati a completa fusione ed espulsi allo stato liquido.

Va ricordato, infatti, che il MALLADRA, nel 1922, raccolse nel vertice chiuso di un *voccolillo* che nell'interno era ancora incandescente, dei prodotti di sublimazione salina, i quali erano filettati ed intersecati dalla lava in modo da presentare l'aspetto di un mandorlato [1]).

Detti sali sublimati furono analizzati da ZAMBONINI e RESTAINO e furono trovati costituiti essenzialmente da silvite e da alite in proporzioni non molto dissimili da quelle da me constatate nella massa fusa esaminata formatasi nel febbraio di quest'anno; infatti essi vi trovarono il 33.51 % di potassio e 12.26 % di sodio sotto forma di cloruri [1]).

L'analogia di queste due formazioni in tempi diversi è evidente, malgrado la differenza che nella formazione raccolta dal MALLADRA una diminuzione di temperatura susseguita alla formazione delle sublimazioni ha permesso che queste venissero raccolte in tale stato, mentre il materiale raccolto dall'IMBÒ è stato espulso allo stato liquido per una successiva rilevante elevazione di temperatura.

Va notato inoltre, che l'analogia di composizione tra le formazioni del 1922 e quella del 1936 non può essere casuale, bensì deve trarre origine da una notevole costanza nella proporzione dei componenti volatili del magma da cui esse trassero origine.

Non v'è dubbio che la miscela salina da me esaminata sia stata espulsa dal conetto allo stato di fusione completa, perchè da un lato si osserva uniformità di struttura microcristallina nella massa ed una rilevante costanza di composizione nelle varie parti di essa (come lo dimostrano le due analisi

---

[1]) ZAMBONINI F. e RESTAINO S., *Sulla presenza del cloruro ferroso fra i prodotti dell'attuale attività del Vesuvio.* Ann. R. Osserv. Vesuviano (3), I, (1924), 121.

eseguite) e dall' altro perchè, come è noto, l' intervallo di cristallizzazione delle soluzioni solide di alite e silvite dalle loro miscele fuse è, anche per questa concentrazione, molto piccola.

È interessante il fatto da me constatato della presenza di cloruro ferroso in questo prodotto dell' attività vesuviana. Dai risultati dell' analisi si vede che il ferro non può essere, almeno per la più gran parte, se non allo stato di cloruro ferroso, quantunque combinato al KCl e NaCl.

È noto che la lawrencite non può venir considerata tra i minerali accertati per il Vesuvio [1]) quantunque MONTICELLI e COVELLI [2]) abbiano menzionato il rinvenimento di cloruro ferroso mescolato con quello di sodio e di ammonio in certe stalattiti sospese alle bocche del cratere prima dell'eruzione dell'ottobre 1822. Nessuna prova, però, essi portarono all'esistenza del minerale; inoltre, la composizione e struttura delle stalattiti menzionate ci sono troppo poco note per permettere alcuna conclusione che non sia completamente dubitativa in proposito.

Il cloruro ferroso fu, poi, constatato nuovamente da ZAMBONINI e RESTAINO nelle sublimazioni accennate raccolte dal MALLADRA nel 1922; essi trovarono, infatti, in tale miscela salina, 1.83 % di ferro ferroso corrispondente a poco più del 4 % di $FeCl_2$. Anche in questo caso, però, il sale non si trovava sotto la forma mineralogica definita della lawrencite, ma, per l'eccesso dei cloruri alcalini presenti, era combinato nel minerale rinneite [$FeCl_2 . 3KCl . NaCl$] la cui presenza venne dallo ZAMBONINI [3]) confermata per la prima volta al Vesuvio anche con qualche osservazione ottica.

Nel mio caso, la quantità di cloruro ferroso, corrispondente al ferro trovato sarebbe di circa 1 %, questa esigua proporzione rende a priori difficile il rinvenimento al microscopio della rinneite da esso, con tutta probabilità, originata assieme ai coesistenti cloruri di potassio e di sodio. Potrebbe essere un indizio della sua presenza l' osservazione di qualche raro punto birifrangente nella massa otticamente isotropa, ove si potesse prescindere da altri componenti anisotropi, o molto meglio la considerazione che la rinneite subisce all' aria umida un processo di alterazione con formazione di eritrosiderite in modo analogo a quello osservato nella miscela esaminata.

Il manganese trovato, che è allo stato bivalente, non può essere che in minima quantità legato eventualmente all'acido solforico ed al potassio per dare la manganolangbeinite [$K_2Mn_2(SO_4)_3$] minerale riscontrato per la

---

[1]) ZAMBONINI F., *Mineralogia Vesuviana*, Atti R. Acc. Scienze fis. e mat. Napoli, suppl. al vol. XX, ser. 2, 1935, p. 84.

[2]) MONTICELLI T. e COVELLI M., *Prodromo della mineralogia vesuviana* (1825), p. 96.

[3]) ZAMBONINI F., *Mineralogia vesuviana*, II ediz. (1935) p. 105.

prima volta da ZAMBONINI e CAROBBI in una miscela di solfati costituen alcune stalattiti formatesi al Vesuvio nel 1922 [1]).

La maggior parte del manganese, invece, è certamente legata al clor pur non [illegible] nuova questa constatazione del cloruro manganoso tra prodotti vesuviani, perchè vi fu già osservato con maggiore o minore s curezza dal MONTICELLI e COVELLI [2], da A. SCACCHI [3]), [4]), dal LACROIX [5] dal COSSA [6]) e (quantunque in tracce), anche da ZAMBONINI e RESTAINO [1] ha un certo interesse perchè questa volta è stato rinvenuto nelle condi zioni ideali per rappresentare il minerale scacchite ($MnCl_2$) secondo la co cezione di ADAM [7]), cioè allo stato anidro.

Per il forte grado di dispersione che il composto ha nella massa, no è possibile eseguire osservazioni ottiche che comprovino la sua presenz come specie mineralogica definita, quantunque i risultati analitici ne con fermino la presenza; nè il colore, roseo, di questo sale si presta, in detto stato di dispersione, a venire percepito nella massa biancastra.

Va notato che anche nella ricordata miscela sublimata nel 1922 fu da ZAMBONINI e RESTAINO riscontrato il manganese, benche in tracce non de terminate quantitativamente, e, in ogni caso, la sua presenza nelle subli mazioni non è illogica data la volatilità relativamente facile del sale ad alta temperatura.

Il rame si trova allo stato ramico, evidentemente sotto forma di cloruro Fra tanti composti di rame contenenti cloro, più o meno esattamente de- finiti osservati al Vesuvio, non è stato ancora sicuramente individuato il cloruro ramico anidro; la sua possibilità di esistenza è stata però pro- spettata dallo ZAMBONINI a conclusione di alcune sue ricerche sulla me- lanotallite [8]).

Nel materiale da me esaminato, l'estrema dispersione del composto nella massa salina si può dimostrare facilmente umettando la superficie di rottura fresca con una soluzione acida di idrogeno solforato, si osserva

---

[1]) ZAMBONINI F. e CAROBBI G., Rend. R. Acc. scienze fis. e mat. Napoli, 1924.

[2]) MONTICELLI T. e COVELLI M., *Storia dei fenomeni del Vesuvio negli anni 1821, 1822, 1823.* Napoli, 1842 p. 269.

[3]) SCACCHI A., *Memoria sull'incendio vesuviano del maggio 1855.* Napoli, 1855, p. 181.

[4]) SCACCHI A., Atti R. Acc. scienze fis. e mat. Napoli, s. 2.ª, vol. VI, n.° 9, 1874, p. 38.

[5]) LACROIX A., Bulletin de la Société Franç. de Min., XXV, 1907, p. 245.

[6]) COSSA A. in PALMIERI L., Rend. R. Accad. sc. fis. e mat. Napoli, 1873, p. 48.

[7]) ADAM, *Tableaux minéralogiques*, 1869, p. 78.

[8]) ZAMBONINI F., *Mineralogia vesuviana.* Atti R. Accad. scienze fis. e mat. di Napoli, s. 2.ª, vol. XIV, 1910, pag. 56.

mmediatamente che essa assume un colore grigio scuro uniformemente istribuito, corrispondente al solfuro ramico formatosi. Non è quindi agevole eseguire ulteriori ricerche per caratterizzare questa fase nella massa.

Il rame era presente in quantità quasi doppia (0.61 %) a quella da me rovata e pure sotto forma di cloruro, anche nei sali sublimati del 1922 nalizzati da Zambonini e Restaino, quantunque lo Zambonini non abbia reduto, evidentemente per ragioni analoghe alle mie, di approfondire la uestione del suo significato e della sua natura in riferimento alla deterninazione di questa specie mineralogica.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 gennaio 1936 - XIV.

Assistono all' adunanza il presidente sen. DE LORENZO, il segretario D'ERASMO, i soci ordinari BAKUNIN, DEL PEZZO, DIAMARE, LONGO, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL E., PIERANTONI e i soci corrispondenti nazionali ANDREOLI, CARNERA, COLAMONICO, GALLUCCI e QUERCIGH.

Il segretario dà lettura del processo verbale della tornata 7 dicembre, che è approvato. Indi comunica i ringraziamenti dell'Università di S. Paolo del Brasile per le pubblicazioni inviate in dono.

L'Accademia si occupa quindi di affari di interna amministrazione.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1.° febbraio 1936 - XIV.

Sono presenti il presidente sen. DE LORENZO, il segretario D'ERASMO, i soci ordinari BAKUNIN, BOTTAZZI, DEL PEZZO, DIAMARE, LONGO, MARCOLONGO, MASONI, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, SIGNORINI ed i soci corrispondenti nazionali ANDREOLI, CARNERA, COLAMONICO, GALLUCCI, NOBILE e QUERCIGH.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell' adunanza 4 gennaio, che è approvato. Indi presenta il fascicolo del Rendiconto relativo al secondo semestre dell' anno 1935 e comunica l'invito della Harvard University di Cambridge (Mass.) alla celebrazione del terzo centenario della sua fondazione. L' Accademia delibera di aderire e di farsi rappresentare dal consocio Henry FAIRFIELD OSBORN.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati i volumi XXI e XXII dell' *Archivio Zoologico,* offerti dal socio PIERANTONI, e l' opuscolo riguardante la sessione straordinaria tenuta dall' Accademia Nazionale di Medicina di Buenos Aires nell' ottobre 1935 in occasione della visita del consocio LONGO, recatosi in Argentina per un ciclo di conferenze in quelle Università. L' Accademia ringrazia i donatori.

Il segretario legge la relazione sui lavori compiuti dall' Accademia nel decorso anno 1935, da stamparsi nel Rendiconto.

Il socio corrispondente CARNERA presenta una sua nota dal titolo: « *Ecclisse totale di luna dell' 8 gennaio 1936. — Osservazioni fatte nel R. Osservatorio Astronomico di Capodimonte* ».

Processo verbale dell'adunanza del dì 7 marzo 1936 - XIV.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, il segretario D'Erasmo, soci ordinari Bakunin, del Pezzo, Diamare, Giordani, Longo, Marcolongo, Iasoni, Pascal Ernesto, Pierantoni, Scorza, Signorini ed i soci corrispon-enti Andreoli, Carnera, Carrelli, Gallucci, Nobile e Ricci.

Aprendo la seduta il presidente propone, e l'Accademia unanime ap-rova, l'invio di un telegramma a S. E. il Maresciallo Badoglio, comandante e forze italiane operanti in Africa orientale, per esprimere il plauso e la iconoscenza per l'azione sua e delle sue eroiche milizie.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 1.° febbraio, che approvato. Indi comunica la richiesta di cambio degli Atti da parte della Jniversity Library of California a Los Angeles. L'Accademia delibera di nviare il volume XX.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalata la *Relazione per l'anno 1934 della Stazione sperimentale per le piante of-ficinali,* offerta dal consocio Longo.

Il socio corrispondente Gallucci presenta, pel Rendiconto, una sua nota lal titolo « *Il paradosso di Carlyle* ».

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il medesimo periodico, ina sua nota sopra « *Coppie di variabili mutuamente causali, matrici ed quazioni funzionali ad esse relative* » ed inoltre una nota del dott. G. De Meo « *Ricerche statistiche sulle cause di morte nella popolazione ita-iana ed in una collettività di assicurati sulla vita* », un'altra della signora lott. Anna Rocco Boselli sopra il « *Comportamento delle forme binarie ispetto ad un sottogruppo del gruppo proiettivo* » ed una terza del dott. Guido Barba « *Sulla definizione di funzioni egualmente singolari del Pin-cherle* » Tutte e tre queste note vengono accolte alla unanimità dall'Ac-cademia.

È egualmente approvata dall'Accademia l'inserzione nel Rendiconto li una nota del Prof. Letterio Toscano dal titolo: « *Successioni ricorrenti e polinomi di Bernoulli e di Eulero* », presentata dal socio Marcolongo.

Il socio Carnera presenta una sua nota sopra le « *Coppie di stelle per lo studio dei micrometri* ».

Processo verbale dell'adunanza del dì 4 aprile 1936 - XIV.

Presiede il sen. De Lorenzo, segretario il socio D'Erasmo. Assistono i soci ordinari Bakunin, del Pezzo, Diamare, Giordani, Longo, Marcolongo,

Pascal Ernesto, Pierantoni ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli Caccioppoli, Carnera, Carrelli, Colamonico, Colosi e Nobile.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 7 marzo, che è approvato.

Il presidente comunica il telegramma di S. E. il Maresciallo Badoglio' il quale ringrazia l'Accademia per le espressioni di plauso rivolte a lui ed alle sue eroiche truppe. Indi il segretario partecipa con dolore la morte, avvenuta il 6 novembre 1935, del socio straniero Henry Fairfield Osborn, presidente del Museo Americano di Storia Naturale di Nuova York, e ne legge una breve commemorazione destinata a ricordarne i principali meriti scientifici nel campo delle discipline geologiche e paleontologiche. La commemorazione viene accolta, insieme col ritratto, per la stampa nel Rendiconto accademico.

Fra le pubblicazioni giunte in omaggio, è segnalata la *Relazione pel 1935 della Stazione sperimentale per le piante officinali*, offerta dal socio Longo.

Il socio Marcolongo fa omaggio di una sua breve nota riguardante due opere poco conosciute di due illustri napoletani, Luca Valerio e G. B. Della Porta. Si sofferma a far rilevare le curiose analogie che l'opera di quest'ultimo « *Elementorum curvilineorum libri tres* », stampata a Napoli nel 1601, presenta colle ricerche di Leonardo da Vinci sulla quadratura di alcune lunule.

Prende poi occasione dalla recente pubblicazione del Prof. R. Giacomelli « *Gli scritti di Leonardo da Vinci sul volo* » — Roma, 1936, per rilevarne la importanza e la profonda dottrina. Tale pubblicazione è stata compiuta sotto gli auspici della Direzione superiore degli studi e delle esperienze del Ministero dell'Aeronautica e nel giorno dell'inaugurazione di Guidonia. Dobbiamo vivamente rallegrarci, egli conclude, che la raccolta di tutti i meravigliosi studi di Leonardo sul volo degli uccelli e sul volo meccanico, sparsi in tutti i suoi numerosi manoscritti, sia stata finalmente fatta, commentata e messa in relazione cogli studi e le esperienze moderne; e che questo lavoro di lunga lena, nuovo monumento al genio di Leonardo, sia stato compiuto da un italiano.

Il socio corrispondente Carnera presenta, per la stampa nel Rendiconto, una nota della dott. Maria Viaro dal titolo « *Orbita definitiva della Cometa 1910 IV (Metcalf)* » proponendone la inserzione. L'Accademia unanime approva.

Il socio corrispondente Andreoli presenta, per il medesimo periodico, una sua nota sopra gli « *Elementi intrinseci delle varietà* ».

Processo verbale dell'adunanza del dì 2 maggio 1936 - XIV.

All'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, partecipano i soci ordi-
ari Bakunin, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Marcolongo, Pascal
rnesto, Pierantoni, Signorini e i soci corrispondenti nazionali Carnera,
arrelli, Gallucci e Ricci.

Il segretario dà lettura del processo verbale dell'adunanza 4 aprile,
he è approvato.

Il presidente, dando notizia di un incidente recentemente occorso al
ocio sen. del Pezzo, propone d'inviare al collega gli augurî di pronta gua-
igione. L'Accademia unanime si associa.

Il segretario presenta, a nome del socio corrispondente Andreoli, per
Rendiconto, una di lui nota « *Sui criteri di convergenza delle serie* »,
ervenuta in Segreteria il dì 30 aprile 1936 - XIV.

Il socio Marcolongo presenta una nota del dott. G. De Meo « *Su l'at-
azione matrimoniale per stato civile in Italia* ». L'Accademia ne approva
lla unanimità l'inserzione nel Rendiconto.

Il socio corrispondente Gallucci presenta, per lo stesso periodico, una
ia nota dal titolo « *Considerazioni su l'economia dinamica* ».

Il socio Diamare informa l'Accademia della morte dell'illustre prof.
uglielmo Romiti, che, nella seconda metà del secolo scorso e nel primo
entennio di questo secolo, rifulse quale principe degli anatomici italiani
er i suoi scritti e per le sue ricerche e come il più illustre maestro con-
emporaneo che ha altresì coperto le cattedre di Anatomia con i suoi allievi.
gli, che lo ebbe Collega a Pisa, ma era già legato a Lui da annosa, pro-
onda estimazione ed affettuosa amicizia, s'inchina innanzi al grande Scom-
arso, insieme ai cultori delle discipline anatomiche ed affini — abbracciate
itte dalla sua mente così vasta e comprensiva, e fatte da Lui valutare
ltresì, senza pregiudizi di scuole e di persone, con infinito amore di Patria,
ui ed all'estero, ne' tanti Congressi Internazionali — e sente di non poter
iancare al dovere di darne all'Accademia almeno un fugace ricordo, sicuro
he sarà più degnamente commemorato nella Classe delle Scienze Mediche
Chirurgiche, della quale l'illustre scomparso era socio emerito.

Il socio Longo presenta, in omaggio, due recenti pubblicazioni relative
ll'attività della Stazione sperimentale per le piante officinali annessa al
. Orto Botanico di Napoli e riferisce sui principali risultati ottenuti dai
iversi sperimentatori, mettendo in particolare rilievo le *Ricerche farma-
ologiche sul boldo e sulla canapa indiana*. Il Presidente, a nome dell'Ac-
ademia, ringrazia.

Processo verbale dell'adunanza del dì 13 giugno 1936 - XIV.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, D'Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Marcolongo, Pascal Ernesto, Picone, Scorza, Signorini, e i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Caccioppoli, Carnera, Colamonico, Gallucci, Nobile, Pascal Mario, Quercigh e Ricci.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza del 2 maggio, che è approvato. Indi il presidente comunica, che avendo recentemente, nella riunione del 6 c. m. in Senato, rinnovato a S. E. il Maresciallo Badoglio il plauso dell'Accademia per il completo trionfo delle armi italiane in Etiopia, ha avuto il gradito incarico di esprimere ai soci i ringraziamenti dell'illustre Comandante.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio sono segnalati alcuni lavori di matematica e di storia della scienza del prof. Federico Amodeo.

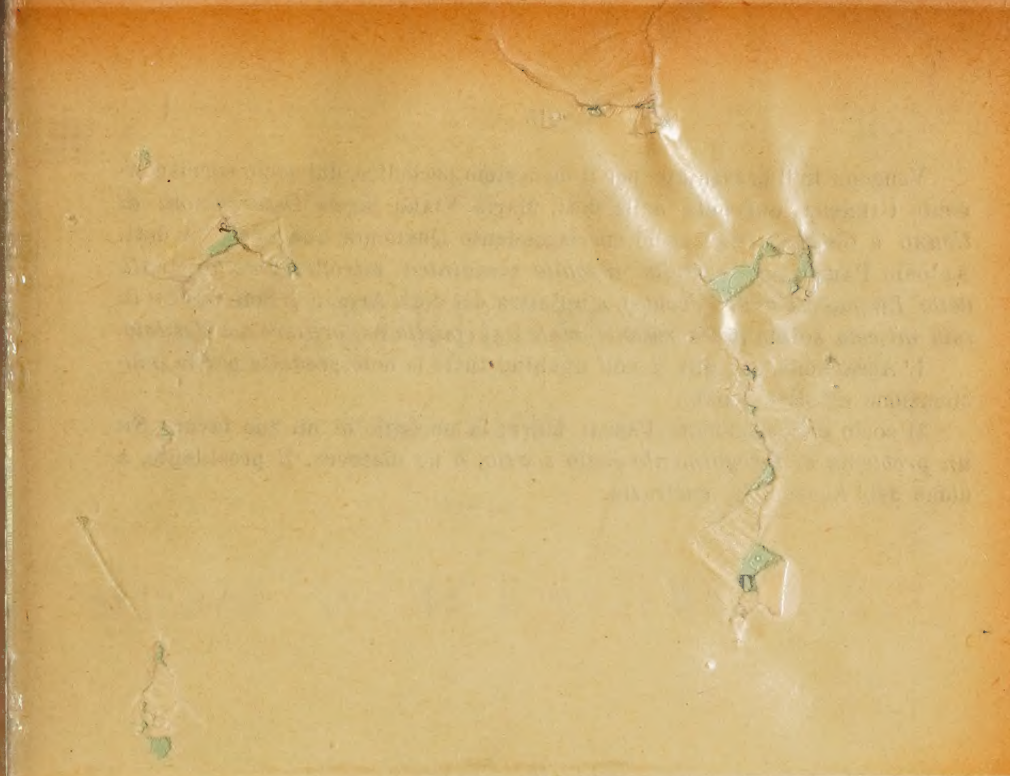
Il socio D'Erasmo presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Incrostazioni calcaree simulanti organismi fossili.*

Il socio corrispondente Mario Pascal presenta, per lo stesso periodico, una sua nota *Sulla costruzione del centro di curvatura delle traiettorie dei punti di una figura piana di area costante e a deformate affini.*

Il socio Picone, prendendo argomento da alcune ricerche recentemente eseguite a Roma, nell'Istituto Centrale per le applicazioni del Calcolo da lui diretto, riferisce sui principali risultati ottenuti, offre in omaggio le pubblicazioni relative e presenta, per il Rendiconto, una nota sopra *Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione.*

Il socio Marcolongo presenta una nota della prof. Anna Rocco-Boselli, dal titolo: *Costruzione di forme invariantive di forme binarie, di 1.°, di 2.° e di 3.° grado, rispetto a forme gruppali di 3.° grado,* proponendone la inserzione nel Rendiconto.

Uguale proposta fa il socio corrispondente Colamonico per una nota della prof. Gina Algranati, presentata anche a nome del sen. De Lorenzo, sopra i *Rapporti fra i fenomeni del vulcanismo e la formazione dei centri e variazione della popolazione nell'isola d'Ischia.*

Analogamente, il socio corrispondente Pascal Mario propone di accogliere nel Rendiconto una nota del prof. G. Palamà *Su alcune formule dell'algebra delle successioni e sullo sviluppo di alcuni determinanti*; e il socio corrispondente Ricci propone di inserirvi una nota del prof. Franco Jossa *Sul calcolo di alcuni cavalletti sollecitati a torsione,* e un'altra del dott. Attilio Linari, dal titolo: *Contributo allo studio sulle travi in cemento armato con mensole.*

Vengono indi presentate, per il medesimo periodico, dal socio corrispondente CARNERA una nota della dott. Maria VIARO sopra *Osservazioni di Urano e Cerere*, e dal socio corrispondente QUERCIGH una nota del dott. Antonio PARASCANDOLA *Sulla trachite sanidinica vitrofirica della Punta della Lingua (isola di Procida)*, e un'altra del dott. Armando SCHIANO *Su di una miscela salina fluita recentemente dal conetto nel cratere del Vesuvio.*

L' Accademia accoglie a voti unanimi tutte le note predette per la pubblicazione nel Rendiconto.

Il socio corrispondente PASCAL Mario fa omaggio di un suo lavoro *Su un problema di inseguimento nello spazio*, e ne discorre. Il presidente, a nome dell' Accademia, ringrazia.